

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МЕРЕЖЕВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ У ВІЙСЬКОВІЙ СФЕРІ В УМОВАХ НАДМІРНОЇ НОМЕНКЛАТУРИ ОДНОТИПНИХ ЗАСОБІВ

У роботі розглянуто проблему оптимального розподілу ресурсів у військових умовах, яка виникла внаслідок різноманіття матеріально-технічної допомоги та специфіки експлуатації сучасного обладнання, а також істотних часових і матеріальних обмежень процесу підготовки особового складу.

Основною метою дослідження є математична формалізація задачі, спрямованої на вирішення поставленої проблеми, та розгляд процесу її розв'язання існуючими та добре зарекомендованими математичними методами теорії дослідження операцій, що дозволяє максимізувати ефективність використання наявних людських і матеріальних ресурсів, у тому числі й у процесі розробки та впровадження запропонованого у роботі підходу.

У першій частині роботи коротко окреслено основні поняття теорії мережевої оптимізації, зокрема, задач максимального потоку та мінімальної вартості. Продемонстровано доцільність використання цих методів для задач розподілу ресурсів із урахуванням обмежень і спорідненості між ресурсами та користувачами.

В основній частині роботи запропоновано приклад конкретної задачі розподілу озброєння серед військовослужбовців, сформульовано математичну модель даної задачі в тому числі й у вигляді графу, та продемонстровано процедуру її розв'язання із використанням методу Фогеля для визначення початкового допустимого розв'язку та методу потенціалів для отримання оптимального розподілу. Результати демонструють можливість забезпечення максимального використання навичок особового складу, що є одним із важливих елементів максимізації ефективності дій відповідного підрозділу.

У заключній частині роботи підкреслено перспективність автоматизації процесу розподілу ресурсів із використанням запропонованих алгоритмів. Обґрунтовано можливість застосування методів у цивільних галузях, таких як логістика та управління персоналом, а також напрямки подальших досліджень, включно із врахуванням додаткових критеріїв оптимізації та впливу невизначеності вхідних даних на її результати.

Ключові слова: лінійне програмування, мережева оптимізація, транспортна задача, розподіл ресурсів, бойова ефективність.

Вступ та постановка задачі. Одним із нових викликів ЗС України, пов'язаним із відсіччю збройної агресії російської федерації та отриманням широкого спектру різноманітної матеріально-технічної допомоги від країн партнерів, стала постановка на озброєння багатьох найменувань техніки, спеціального обладнання та озброєнь (далі, *обладнання*), що мають однакове призначення, проте можуть мати істотні відмінності в експлуатації чи обслуговуванні та ремонті. Однак при цьому не є практично можливим підготувати особовий склад до виконання відповідних процедур з усіма альтернативними

варіантами обладнання на однаково високому рівні, внаслідок чого ефективність використання наявних людських і матеріальних ресурсів може істотно знижуватися. Також слід врахувати, що навчання особового складу є тривалим процесом, а отримання саме тієї номенклатури обладнання (ще й у потрібній кількості), до ефективної експлуатації якої особовий склад вже підготовлений на належному рівні, часто не є можливим з багатьох причин (наприклад, припинення виробництва чи його недостатніх обсягів, вичерпання складських запасів, торгівельних санкцій тощо).

З урахуванням всього зазначеного вище найбільш простим шляхом хоча б часткового подолання даної проблеми і покращення використання наявних ресурсів є оптимізація розподілу матеріальних засобів серед особового складу шляхом оптимального призначення з урахуванням фактично наявних навичок експлуатації відповідних зразків обладнання певною особою (екіпажем, підрозділом тощо) [1–4].

У даній роботі ми пропонуємо застосувати для вирішення даної задачі оптимального розподілу методи мережевої оптимізації теорії дослідження операції, які дозволять не лише виконувати задачу оптимізації призначення (тобто створення пар “обладнання – особа”), але й робити це обчислювально ефективно навіть для задач із тисячами вхідних елементів.

Аналіз останніх досягнень і публікації.

Мережеві оптимізаційні задачі – це підклас задач лінійного програмування, що описують оптимальний розподіл ресурсів у мережі [5,6]. Мережа складається з **вузлів** (вершин) і **ребер** (дуг), які з'єднують вузли, описуючи можливі шляхи потоку ресурсу.

Основні поняття:

1. **мережа** складається з множини вузлів V і ребер E , кожне з яких має напрямок та **ємність** $c(u,v)$, що визначає максимальний потік між вузлами u і v .
2. **потік** $f(u,v)$ – кількість ресурсу, що проходить через ребро від вузла u до v . Має задовольняти наступні обмеження:
 - $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ – потік не може перевищувати ємність ребра;
 - **баланс потоку**: сума вхідних потоків у вузол дорівнює сумі вихідних потоків (окрім джерела s і стоку t);
3. **задача про визначення максимального потоку (maximum flow problem)**: визначає найбільшу кількість ресурсу, що може бути передана від джерела s до стоку t за умовою обмеженої ємності всіх ребер мережі;
4. **задача про визначення мінімальної вартості (minimum cost problem)**: визначає найменшу вартість передачі певної кількості ресурсу через задану мережу від її джерела s до її стоку t , за умови обмеженої ємності всіх ребер мережі та певної вартості транспортування одиниці ресурсу через кожне ребро.

Типовою сферою застосування мережевих задач є оптимізація розподілу ресурсів у логістиці чи виробництві.

У контексті оптимізації розподілу обладнання, метод максимального потоку може бути використаний для:

5. **потік** $f(u,v)$ – кількість ресурсу, що проходить через ребро від вузла u до v . Має задовольняти наступні обмеження:
 - **розподілу ресурсів**: визначення оптимального призначення операторів на завдання, враховуючи їхню кваліфікацію та доступність обладнання.
 - **мінімізації конфліктів**: гарантування, що жодне обладнання або оператор не використовується понад свої можливості.

- **максимізації ефективності:** пошук такого розподілу, який максимізує сумарну кваліфікацію або інший показник ефективності.
- Розв'язок задачі включає побудову графа, де:
- вузли представляють типи обладнання та операторів;
- ємності ребер відповідають доступній кількості ресурсів;
- вартість ребер відображає ефективність кожного призначення (*спорідненість* між військовослужбовцем і видом зброї).
- Приклади практичного застосування запропонованого підходу можуть бути
- розподіл екіпажів військовослужбовців для управління технікою;
- оптимальне призначення особового складу на бойові чи виробничі завдання;
- оптимальний розподіл озброєнь та обладнання між особовим складом підрозділу;
- оптимальне формування підрозділів на основі потреб майбутніх підрозділів та фактичних вмінь військовослужбовців.

Метою статті є формулювання загальної задачі оптимізації призначення обладнання з метою оптимізації ефективності застосування наявних людських і матеріально-технічних ресурсів, що може бути ефективно розв'язана існуючими методами лінійного програмування.

Виклад основного матеріалу

Для конкретики і спрощення викладу матеріалу розглянемо наступну задачу: У військовій частині потрібно розподілити наявне озброєння між військовослужбовцями залежно від їх навичок.

1. **Озброєння (*ресурс*):** наявні три види озброєння:
 - E_1 : снайперські гвинтівки (5 одиниць).
 - E_2 : гранатомети (3 одиниці).
 - E_3 : протитанкові комплекси (2 одиниці).
2. **Військовослужбовці (*споживачі*):** є чотири умовні групи військовослужбовців залежно від рівня їх первинної підготовки за кожним із напрямків:
 - O_1 : “ артилерія” (6 осіб).
 - O_2 : “ інженерні війська” (4 особи).
 - O_3 : “ антитерористичні підрозділи” (3 особи).
 - O_4 : “ морська піхота” (5 осіб).
3. **Спорідненість:** спорідненість A_{ij} описує рівень підготовки військовослужбовців певної групи до використання відповідного виду озброєння (наведені значення є умовними і підібрані з метою покращення подальшої подачі матеріалу даної роботи):

	E_1 :	E_2 :	E_3 :
O_1	5	8	1
O_2	2	5	8
O_3	9	6	7
O_4	8	1	9

4. **Мета:** розподілити озброєння так, щоб максимізувати загальну бойову ефективність, тобто суму спорідненостей між військовослужбовцями та озброєнням, які вони отримують.

Математична постановка задачі:

1. Мережа:

- джерело s і стік t ;
- вузли E_1, E_2, E_3 (озброєння) та O_1, O_2, O_3, O_4 (групи військовослужбовців).

2. Ребра:

- від s до кожного E_i потужність ребра дорівнює E_i (кількість одиниць озброєння);
- від кожного O_j до t : потужність ребра дорівнює O_j (кількість військовослужбовців у групі);
- від E_i до O_j : значення потоку x_{ij} , що визначає, скільки осіб з групи O_j призначено до озброєння E_i .

3. Цільова функція:

Максимізувати

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 A_{ij} \cdot x_{ij}.$$

4. Обмеження:

- $\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq E_i, i = 1,2,3;$
- $\sum_{i=1}^3 x_{ij} \leq O_j, j = 1,2,3,4$;
- $x_{ij} \geq 0; i$ є цілими числами.

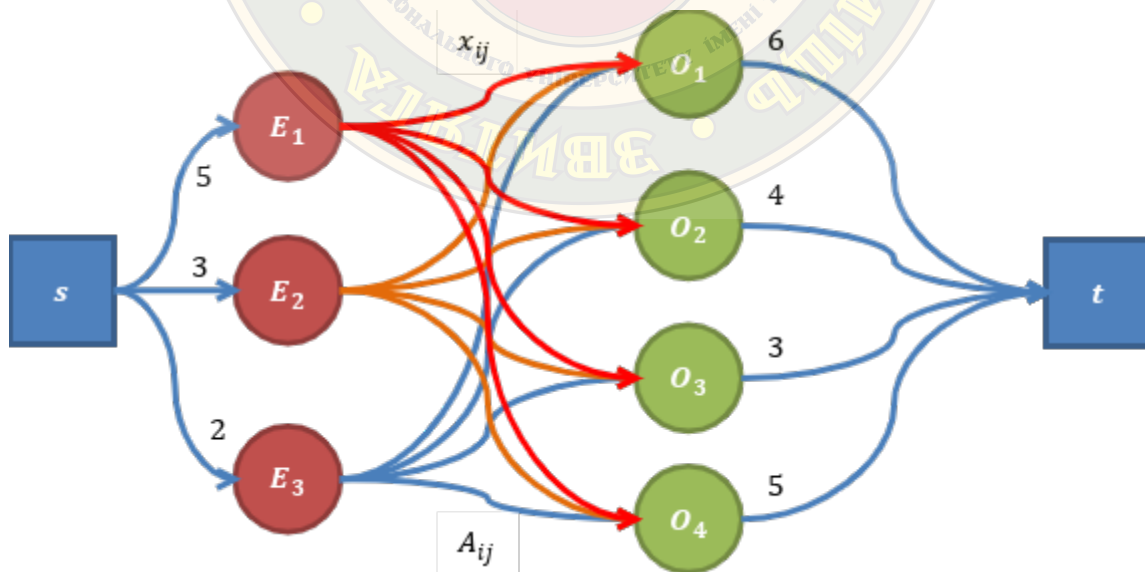


Рисунок 1 – формулювання задачі розподілу ресурсів у вигляді графу

Методи розв'язування таких задач зводяться до простих операцій з таблицею, де в певному порядку записані всі умови задачі. Таку таблицю називають розподільною

таблицею. У цій таблиці записуються: види озброєння, групи військовослужбовців, спорідненість, а також, окремими рядком і стовпцем, кількість наявних одиниць озброєння кожного виду (a_i) та кількість військовослужбовців у кожній групі (b_j).

Якщо $\sum a_i \neq \sum b_j$, то, як і у випадку транспортних задач, вводиться додатковий фіктивний елемент із нульовими спорідненостями (у даному випадку – “вид” озброєння E_ϕ):

	E_1 :	E_2 :	E_3 :	E_ϕ :	$\sum a_i$
O_1	5	8	1	0	6
O_2	2	5	8	0	4
O_3	9	6	7	0	3
O_4	8	1	9	0	5
$\sum b_j$	5	3	2	8	

Тобто маємо транспортну задачу на максимізацію прибутку, для розв’язування якої необхідно визначити *початковий допустимий розв’язок*.

Класичним методом, що дозволяє одержати близький до оптимального початковий допустимий розв’язок, є метод Фогеля [7].

Алгоритм методу Фогеля для задач на максимізацію є наступним:

1. *підрахунок різниць*: на кожному кроці обчислюємо різниці між двома найбільшими елементами в кожному рядку та стовпці (далі саме ці різниці визначатимуть, наскільки вигідно вибирати той чи інший шлях);

2. *вибір пріоритетного рядка чи стовпця*: вибираємо рядок або стовпець із найбільшим значенням обчисленої різниці – він визначає той елемент, максимізація якого є найбільш вигідною із урахуванням потенційного програшу у випадку вибору деякого іншого елемента;

3. у вибраному рядку чи стовпці визначаємо комірку з найбільшим значенням різниці та розподіляємо до неї максимально можливий обсяг ресурсів (відповідно до обмежень задачі). Якщо максимальне значення різниці присутнє у декількох рядках/стовпцях матриці, то серед їх елементів обирається один (ще не викреслений) з максимальною спорідненістю;

4. викреслюємо рядок або стовпець, що проходить через обраний елемент матриці та був вичерпаний при його заповненні, після чого перераховуємо потреби споживачів і залишки ресурсів, а також обчислюємо нові значення різниць;

5. продовжуємо процес доти, доки не будуть використані всі ресурси та задоволені всі потреби.

Застосовавши цей метод до нашої задачі отримуємо наступний початковий розв’язок:

	E_1	E_2	E_3 :	E_ϕ
O_1		3		3
O_2			2	2
O_3	3			

O_4	2			3
-------	---	--	--	---

У цьому випадку загальна бойова ефективність дорівнює 83, а наведеній матриці розподілу відповідає наступний граф:

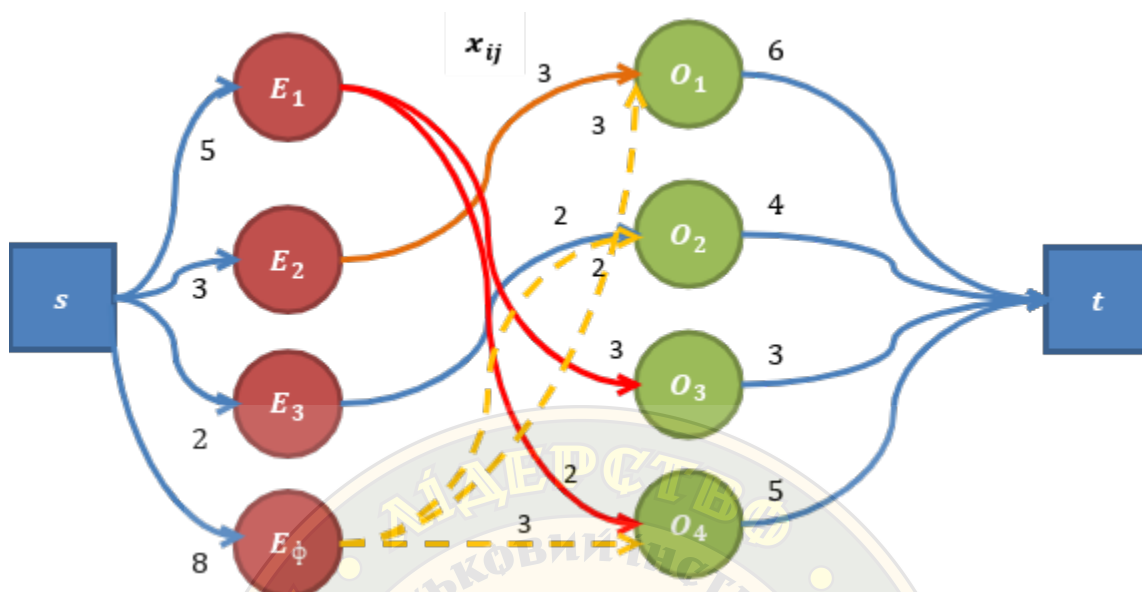


Рисунок 2 – структура початкового (субоптимального) розподілу озброєнь

Побудований опорний план можна довести до оптимального за допомогою симплекс-методу. При існуючих особливостях моделі транспортної задачі (обмеження мають вигляд рівностей, кожна невідома входить у два рівняння, коефіцієнти при невідомих – одиниці) процес її розв'язання симплекс-методом є громіздким. Тому для знаходження оптимального плану транспортної задачі створені спеціальні методи, найпоширенішим з яких вважається метод потенціалів [3,7,8].

На початку методу кожному вузлу (джерелу чи споживачеві) задається свій потенціал. Потенціал джерела дорівнює нулю (наприклад, $\pi_i = 0$), а значення потенціалів інших вузлів обчислюються з урахуванням значень спорідненості:

1. обчислюємо різницю вартості Δ_{ij} для кожного ребра: $\Delta_{ij} = A_{ij} + \pi_i - \pi_j$;
2. якщо $\Delta_{ij} \geq 0$, то поточний потік оптимальний для цього ребра;
3. якщо $\Delta_{ij} < 0$, то потік через ребро може бути покращений;
4. знаходимо замкнені цикли у графі, які включають ребра з $\Delta_{ij} < 0$;
5. перерозподіляємо потоки вздовж циклів: збільшуємо потік по ребрах із $\Delta_{ij} < 0$ і зменшуємо по зворотних;
6. перераховуємо потенціали вершин за алгоритмом, що застосовувався на кроці 1;
7. якщо для всіх ребер $\Delta_{ij} \geq 0$, то поточний розв'язок є оптимальним. Інакше повертаємось до кроку 4.

Після застосування методу потенціалів отримуємо оптимальний розв'язок, наведений на рис. 3.

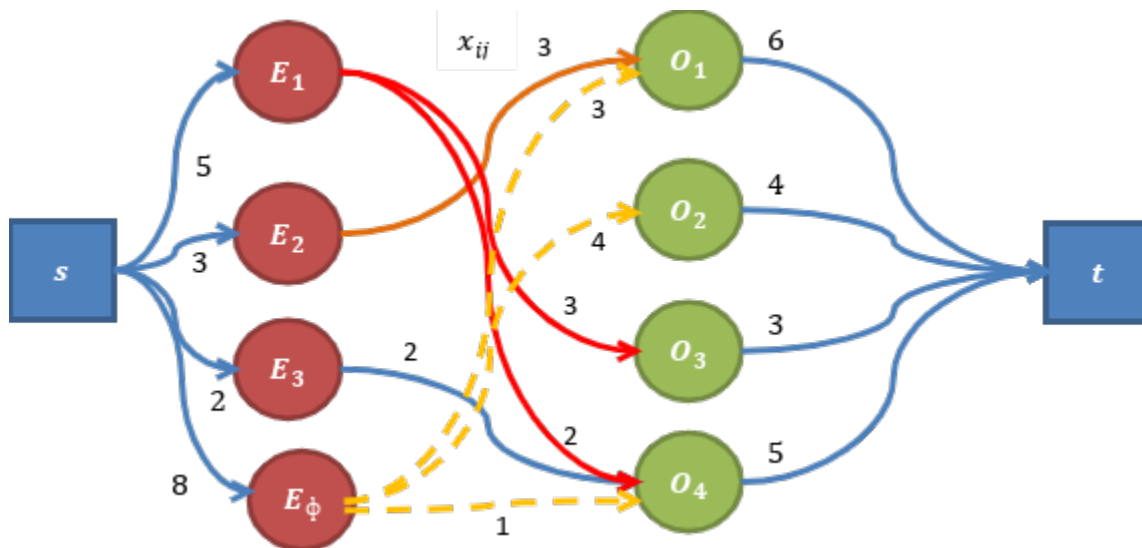


Рисунок 3 – структура оптимального розподілу озброєнь серед особового складу

Тобто оптимальний розподіл озброєння, що забезпечує максимальну загальну бойову ефективність підрозділу (85), має вигляд:

	E_1	E_2	E_3
O_1		3	
O_2			
O_3	3		
O_4	2		2

Висновки. У цій роботі розглянуто застосування методів мережевої оптимізації для вирішення задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів (в тому числі в умовах військового стану). Продемонстровано, що використання відомих математичних алгоритмів, таких як метод Фогеля для отримання початкового допустимого розв'язку та методу потенціалів для його оптимізації, дозволяють ефективно вирішувати задачі ресурсів наведеного класу. Це є важливим з урахуванням того, що дані методи вже якісно реалізовані у багатьох наявних програмних засобах для розв'язання задач лінійного програмування, та є значно ефективнішими в обчислювальному плані за класичний симплекс-метод. Тобто розв'язання аналогічних задач розподілу ресурсів є можливим та доцільним із застосуванням звичайних ПК навіть для задач із дуже великою кількістю вхідних параметрів: сотень і більше видів обладнання та озброєнь, а також груп військовослужбовців (включно із групами, що складаються з окремих осіб) [9–12].

Під час розв'язання задач великого обсягу є доцільним починати розв'язання із методу обчислення максимального потоку крізь мережу, що моделює задачу, з коефіцієнтами спорідненості, округленими до 0 та 10. Це дасть можливість швидко оцінити як можливе значення бойової ефективності підрозділу, так і максимальне число пар виконавець-обладнання з практично доцільним ступенем спорідненості, дозволяючи побачити найбільш вузькі місця – наявність надлишкових ресурсів певних типів чи їх принципову нестачу – і спробувати почати процес ліквідації цих проблемних місць ще до початку, власне, фінального етапу процесу розподілу [3,8,13,14].

Процес оптимізації призначення може бути додатково автоматизований шляхом комп'ютерного анкетування чи тестування осіб, розподіл обладнання між якими планується,

з метою незалежного та незаангажованого визначення значень коефіцієнтів спорідненості між наявними людськими та матеріальними ресурсами. Далі всі отримані таким чином дані можуть автоматично передаватися до програмного модулю, що розв'язуватиме задачу оптимізації за наведеними (чи будь-якими іншими) алгоритмами без втручання людини, та видаватиме оптимальний розподіл ресурсів в електронній чи паперовій формі у вигляді матриці (аналогічній наведеній вище) чи поіменного списку закріплення обладнання за кожною особою.

Описаний варіант автоматизація процесу призначення дозволяє не лише суттєво зменшити витрати часу та людських ресурсів, а також і мінімізувати вплив людського фактору на даний процес.

Запропоновані підходи є універсальними і можуть бути застосовані не лише у суто військовій сфері, а й у споріднених та цивільних галузях, таких як логістика, управління персоналом та виробництво, де оптимальний розподіл ресурсів відіграє не меншу роль.

Подальшим розвитком цієї роботи може бути як інтеграція у задачу додаткових критеріїв оптимізації методами лінійного програмування цілей (наприклад, вартість ресурсів та їх експлуатації, ризику втрат найбільш підготовленого особового складу при призначенні їх на небезпечні, проте не дуже важливі у масштабах загальної картини задачі з лише маргінальним збільшенням загальної бойової ефективності підрозділу тощо) так і більш детальне вивчення впливу неточності оцінки коефіцієнтів спорідненості на загальну якість процесу оптимізації [3,6,8].

ЛІТЕРАТУРА:

1. Hale Donald B. Allocation of Scarce Healthcare Resources in a Military Treatment Facility during a Pandemic: A Comparison of Goal Programming and Portfolio Decision Analysis Methods. *Theses and Dissertations*. 2021.
2. op den Buijs T., Olsthoorn P. Human Resource Management for Military Organizations: Challenges and Trends. *Handbook of Military Sciences*. Cham, 2023. P. 1–26. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-02866-4_68-1
3. Taha H. Operations Research: An Introduction. Pearson, 2017.
4. Scala N. M., Howard, II J. P. Handbook of Military and Defense Operations Research. 2nd ed. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2024. URL: <https://doi.org/10.1201/9781003396307>
5. Ford L. R., Fulkerson D. R. Maximal Flow Through a Network. *Canadian Journal of Mathematics*. 1956. Vol. 8. P. 399–404. URL: <https://doi.org/10.4153/cjm-1956-045-5>
6. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 1993. 863 p.
7. Reinfield, N. V., Vogel, W. R. Mathematical Programming. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall. 1958.
8. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. Introduction to operations research, tenth edition. McGraw-Hill Education. 2010.
9. Goldberg A. V., Tarjan R. E. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM*. 1988. Vol. 35, no. 4. P. 921–940. URL: <https://doi.org/10.1145/48014.61051>
10. Kolmogorov, V., Goldberg, A. An Efficient Algorithm for Finding Maximum Flow. *Journal of Operations Research*. 2004. Vol. 52, no. 3. P. 397-411.
11. Orlin, J. B. Max Flows in $O(nm)$ Time, or Better. *SIAM Journal on Computing*, 2013. Vol. 2, no 4. P. 1235-1255.
12. Bazaraa M. S., Jarvis J. J., Sherali H. D. Linear Programming and Network Flows. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2011.
13. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C. Introduction to Algorithms / ed. by C. T. H. Cambridge, MA, USA : The MIT Press, 2009. 1292 p.
14. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Springer, 2018. 719 p.

REFERENCES:

1. Hale, D. B. (2021) 'Allocation of Scarce Healthcare Resources in a Military Treatment Facility during a Pandemic: A Comparison of Goal Programming and Portfolio Decision Analysis Methods'. PhD Thesis, University of [University Name].
2. op den Buijs, T. and Olsthoorn, P. (2023) 'Human Resource Management for Military Organizations: Challenges and Trends', in Sookermany, A.M. (ed.) *Handbook of Military Sciences*. Springer, Cham.
3. Taha, H. A. (2017) *Operations research: an introduction*. Pearson.
4. Scala, N. M. and Howard, J. P. II (eds) (2024) *Handbook of Military and Defense Operations Research*. CRC Press.
5. Ford, L. R. and Fulkerson, D. R. (1956) 'Maximal flow through a network', *Canadian Journal of Mathematics*, 8(3), pp. 399-404.
6. Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., and Orlin, J. B. (1993) *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall.
7. Reinfield, N. V. and Vogel, W. R. (1958) 'Mathematical Programming'. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
8. Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2010) *Introduction to Operations Research* (10th ed.). McGraw-Hill Education.
9. Goldberg, A. V. and Tarjan, R. E. (1988) 'A New Approach to the Maximum Flow Problem', *Journal of the ACM*, 35(4), pp. 921-940.
10. Kolmogorov, V. and Goldberg, A. (2004) 'An Efficient Algorithm for Finding Maximum Flow', *Journal of Operations Research*, 52(3), pp. 397-411.
11. Orlin, J. B. (2013) 'Max Flows in $O(nm)$ Time, or Better', *SIAM Journal on Computing*, 42(4), pp. 1235-1255.
12. Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. D. (2011) *Linear Programming and Network Flows* (4th ed.). Wiley.
13. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C. (2009) *Introduction to Algorithms* (3rd ed.). MIT Press.
14. Korte, B. and Vygen, J. (2018) *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms* (6th ed.). Springer.

Ph.D. Zavalniuk V.V., Ph.D. Sinyavsky O.V., Ph.D. Heorhalina O.R., Honcharuk A.A.

EMPLOYING NETWORK OPTIMIZATION TECHNIQUES FOR RESOURCE DISTRIBUTION IN MILITARY SPHERE AMIDST A SURPLUS OF HOMOGENEOUS ASSETS

The paper addresses the problem of optimal resource allocation in military conditions, which has arisen due to the diversity of technical assistance, the specifics of modern equipment operation, and significant time and material constraints in personnel training. The primary goal of this research is the mathematical formalization of the problem, aimed at solving the outlined issue, and an examination of its solution using well-established mathematical methods of operations research. This approach maximizes the efficiency of human and material resources, including during the development and implementation of the proposed methodology.

The first section of the study briefly outlines the fundamental concepts of network optimization theory, including maximum flow and minimum cost problems. The feasibility of applying these methods to resource allocation tasks, considering constraints and affinities between resources and users, is demonstrated.

In the main part of the paper, a specific example of a weapon allocation task among military personnel is presented. The mathematical model of the task, including its graphical representation, is formulated, and the solution procedure is demonstrated. The Vogel

approximation method is used to determine an initial feasible solution, followed by the potentials method to achieve an optimal allocation. The results demonstrate the potential to maximize the utilization of personnel skills, which is a key element in enhancing the efficiency of the respective units operations.

The concluding section highlights the prospects of automating the resource allocation process using the proposed algorithms. The applicability of these methods in civilian fields, such as logistics and personnel management, is substantiated, along with directions for further research, including incorporating additional optimization criteria and assessing the impact of input data uncertainty on the results.

Keywords: linear programming, network optimization, transportation problem, resource allocation, combat efficiency.

