УДК 51

к.т.н., с.н.с. **Невольніченко А.І.** (ВІКНУ)
к.т.н., доц. **Пампуха І.В.** (ВІКНУ)
к.філол.н., доц. **Білан М.Б.** (ВІКНУ)
к.т.н., с.н.с. **Охрамович М.М.** (ВІКНУ)

ФОРМУВАННЯ СТРУКТУРНОЇ МАТРИЦІ «ШЛЯХИ-ОПЕРАЦІЇ» ДЛЯ ГРАФА МЕРЕЖЕВЕГО ТИПУ

Для вирішення задач структурної оптимізації «об'єктів» дослідження (семантичних мереж у структурній лінгвістиці, маршрутів у «транспортних» мережах, процесів функціонування «складних» систем) розроблено метод «потенціалів» щодо визначення елементів структурної матриці «шляхи-операції» об'єкта дослідження дозволяє сформувати її за допомогою ефективної стандартної комп'ютерної процедури у складі спеціального математичного програмного забезпечення (логіко-математичної обробки комп'ютерних засобів автоматизації управління складними процесами сітьового типу) засобів автоматизації. Для реалізації цього методу на комп'ютерних засобів автоматизації управління розроблено алгоритм. Результативність, детермінованість і масовість алгоритму процедури доведені вирішенням контрольних прикладів.

Ключові слова: граф, «шляхи-операції», «складні» системи.

Вступ. Дана задача виникає при структурній оптимізації «об'єктів» дослідження (семантичних мереж у структурній лінгвістиці, маршрутів у «транспортних» мережах, процесів функціонування «складних» систем), моделлю яких є орієнтований граф «гамак», а саме:

$$S = (X, G), \tag{1}$$

де *X* – множина вершин графу, які відображають «події» (як стани процесу), причому вершині x_1 відповідає початковий стан, вершині x_z – кінцевий стан, а вершинам (x_2 ,…, x_{z-1}) – проміжні стани; *G* – множина дуг, які відображають операційні переходи між станами, причому вершині x_1 інцидентні лише виходячи дуги, вершині x_z– лише заходячи дуги, а решті вершин (x_2 ,…, x_{z-1}) – заходячи й виходячи дуги.

Основна частина. Регулярна форма завдання сітьового графу (1) – матриця суміжності вершин (чи матриця «інцидентності»)

$$S_{z\times z} = \| \, g_{ij}(x_i, x_j) \, \|_{z\times z}, \tag{2}$$

де елементи матриці приймають наступні значення: $g_{ij} = 1$, якщо дуга виходе із вершини x_i і заходе у вершину x_j; $g_{ij} = 0$, якщо вершини x_i і x_j не є суміжними (не мають інцидентної дуги).

Ненульові елементи (дуги) матриці суміжності надають операційний склад сітьового процесу – вектор

$$D = \langle d_k, k = \overline{1,n} \rangle. \tag{3}$$

Логічна структура процесу завдається системою логічних функцій відносин «передування» (чи «слідкування») операцій в ході процесу

$$bd_k = lf_{ik}\left(ed_i, i = \overline{1, k-1}\right), k = \overline{1, n} \ , \tag{4}$$

де bd_k– логічна змінна початку кожної наступної операції d_k; ed_i– логічна змінна скінчення кожної попередньої операції d_i; lf_{ik} – логічний вираз для умов початку операції bd_k.

Істинність кожної функції слідкування означає, що усі операції процесу впорядковані по відносинам передування, і тому матриця суміжності вершин (2) буде мати ненульові елементи тільки у правій верхній її половині відносно головної діагоналі.

Ефективні процедури вирішення задач оптимального розподілу ресурсів операціях складного процесу сітьового типу потребують його ізоморфного перетворення матриці інцидентності у структурну матрицю «шляхи-операції»

$$\mathrm{V}_{m\times n} = \| \nu_{ij}\left(w_i, g_j\right) \|_{z\times z}, \tag{5}$$

кожний елемент якої може приймати наступні значення: $\nu_{ij} = 1$, якщо шляху w_i належить дуга g_j; $\nu_{ij} = 0$ – у протилежному випадку.

Формування структурної матриці з матриці інцидентності вершин не є тривіальною процедурою визначення усіх шляхів (ланцюгів дуг) сітьового графу і тому потребує розробки ефективного методу вирішення даної задачі. Розглянемо саме такий метод «потенціалів вершин».

На 1-му етапі визначається загальна кількість *m* шляхів (ланцюгів дуг з початкової до кінцевої вершин) обчисленням потенціалів його вершин.

Потенціалом вершини x_i назвемо величину p_i, яка чисельно дорівнює кількості шляхів із даної вершини в кінцеву вершину x_z. Шляхи вважаємо різними, якщо ланцюги дуг, що їх складають, відрізняються хоча б однією дугою. Потенціалом кінцевої вершини вважаємо значення $p_z = 1$, оскільки дана вершина є «виходом» графу-сітки з єдиною умовною дугою, що виходе. Потенціали решти вершин визначаються за допомогою рекурентного співвідношення – рівняння потенціалів

$$p_i = \sum_{j=z}^{(i+1)} \left(p_j \times g_{ij}\right),\ i = \overline{(z-1), 1}. \tag{6}$$

Таким чином, процес обчислення потенціалів розгортається послідовно від кінцевої вершини до початкової, причому для обчислення потенціалу кожної даної вершини повинні бути обчислені потенціали суміжних вершин, що слідкують (в напрямку інцидентних дуг) за даній, тобто вершин, в які заходять дуги з даної вершини. Потенціал початкової вершини при цьому буде дорівнювати загальній кількості шляхів на сітьовому графі – $(p_z = m)$.

На 2-му етапі за допомогою потенціалів вершин, знайдених на 1-му етапі, виділяються усі *m* шляхів сітьового графу, що проходять через його вершини від початкової до кінцевої. Процедура виділення шляхів також є покроковою і реалізується на матриці суміжності вершин (інцидентності) $\mathrm{S}_{z\times z}$.

Розкриємо дану матрицю до її елементів

$$S_{z\times z}(X,G)=\left|\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{X} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \dots & \boldsymbol{x_j} & \boldsymbol{x_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{x_z} & \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{x_1} & \times & g_{12} & \dots & g_{1j} & \dots & \dots & g_{1z} & \boldsymbol{p_1=m} \\
\dots & 0 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{x_{i-1}} & 0 & 0 & \dots & g_{(i-1)j} & g_{(i-1)(j+1)} & \dots & g_{(i-1)z} & \boldsymbol{p_{i-1}} \\
\boldsymbol{x_i} & 0 & 0 & 0 & \times & g_{i(j+1)} & \dots & g_{iz} & \boldsymbol{p_i} \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{x_{z-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & g_{(z-1)z} & \boldsymbol{p_{z-1}} \\
\boldsymbol{x_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \boldsymbol{p_z=1} \\
\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{q_1=m} & \boldsymbol{q_2} & \dots & \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{q_z=1} &
\end{array}\right| \qquad (7)$$

$$S_{z\times z}(X,G)=\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \dots & \boldsymbol{x_j} & \boldsymbol{x_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{x_z} & \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{x_1} & \times & g_{12} & \dots & g_{1j} & \dots & \dots & g_{1z} & \boldsymbol{p_1=m} \\
\dots & 0 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{x_{i-1}} & 0 & 0 & \dots & g_{(i-1)j} & g_{(i-1)(j+1)} & \dots & g_{(i-1)z} & \boldsymbol{p_{i-1}} \\
\boldsymbol{x_i} & 0 & 0 & 0 & \times & g_{i(j+1)} & \dots & g_{iz} & \boldsymbol{p_i} \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{x_{z-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & g_{(z-1)z} & \boldsymbol{p_{z-1}} \\
\boldsymbol{x_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \boldsymbol{p_z=1} \\
\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{q_1=m} & \boldsymbol{q_2} & \dots & \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{q_z=1} &
\end{array}\right|$$

Матриця доповнена стовпчиком *P* значень потенціалів вершин з виходячими дугами та стрічкою *Q* однойменних потенціалів вершин з заходячими дугами (виділено жирним шрифтом). Тоді рівняння потенціалів (6) буде мати більш зручний вигляд, а саме:

$$p_i=\sum_{j=z}^{(i+1)}(q_j\times g_{ij}),\ i=\overline{(z-1),1}, \qquad (8)$$

Перенумеруємо усі дуги по порядку, наприклад – за правилом

$$d_k=k,\ k=\overline{1,n}, \qquad (9)$$

де черговий номер присвоюється дузі, що відповідає черговому ненульовому елементу g_{ij} в *i*-й стрічці матиці суміжності вершин (7), починаючи з 1-ої стрічки і закінчуючи останньою. Поставимо у матриці (7) номера дуг на місце відповідних ненульових елементів; одержимо наступну (умовний приклад) матрицю (10) інцидентності «вершини-дуги» – *S(X,D).*

Перший крок процедури виділення шляхів починається з вершини x_1 . Для цього на матриці (10) обираємо опорний «нульовий» елемент $e_{11}=(\times)$ головної діагоналі матриці, якому відповідає «нульовий» стовпчик й «ненульова» стрічка дуг, виходячих з вершини x_1 з потенціалом $p_1=m$ й заходячих у вершини з потенціалами $(q_2,\dots,\ q_j)$. У відповідності з рівнянням балансу потенціалів буде справедливе співвідношення

$$S_{z\times z}(X,G)=\left|\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{X} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \dots & \boldsymbol{x_j} & \boldsymbol{x_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{x_z} & \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{x_1} & \times & d_1 & d_2 & \boldsymbol{d_{j-1}} & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{p_1=m} \\
\dots & 0 & \times & \dots & \boldsymbol{d_{k-2}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{x_{i-1}} & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{d_{k-1}} & d_k & \dots & 0 & \boldsymbol{p_{i-1}} \\
\boldsymbol{x_i} & 0 & 0 & 0 & \times & \boldsymbol{d_{k+1}} & \boldsymbol{d_{k+2}} & 0 & \boldsymbol{p_i} \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-2} & d_{n-1} & \dots \\
\boldsymbol{x_{z-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & d_n & \boldsymbol{p_{z-1}} \\
\boldsymbol{x_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \boldsymbol{p_z}=1 \\
\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{q_1=m} & \boldsymbol{q_2} & \dots & \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_{j+1}} & \dots & \boldsymbol{q_z}=1 &
\end{array}\right| \qquad (10)$$

$$p_1=q_2+\dots+q_m=m\,, \qquad (11)$$

тому дуги 1-ої стрічки розподіляться по усіх шляхах у відповідності до значень потенціалів вершин, в які вони заходять. Правило розподілу наступне.

В структурній матриці $V_{m\times n}$ (5) у 1-му стовпчику, який відповідає номеру дуги d_1, починаючи зверху, заповнюються «1» (одиницями) скрізь q_2 елементів, тобто

$$v_{ij}=1, i=\overline{1,q_2}, j=\ d_1\,, \qquad (12)$$

потім у 2-му стовпчику, який відповідає номеру дуги d_2, починаючи з елемента з номером (q_2+1), заповнюються «1» (одиницями) скрізь q_3 елементів, тобто –

$$v_{ij}=1, i=\overline{(q_2+1),(q_2+q_3)}, j=\ d_2\,, \qquad (13)$$

і, нарешті, в j-му стовпчику, який відповідає номеру дуги d_{j-1}, починаючи з елемента з номером $\left(q_2+\dots+q_{j-2}+1\right)$, заповнюються «1» (одиницями) скрізь q_{i-1} елементів, тобто

$$v_{ij}=1, i=\ \overline{q_2,m}\, j=d_{j-1}. \qquad (14)$$

Кожний подальший j-й крок полягає у наступному.

На матриці (10) обираємо черговий опорний «нульовий» елемент $e_{jj}\ =(x)$ головної діагоналі матриці. Відповідні до опорного елементу дільниці стовпчика і стрічки матриці виділені жирним шрифтом.

У j-му стовпчику, починаючи зверху, шукається перший ненульовий елемент; для нашого прикладу – це дуга d_{j-1}, що заходе у вершину x_j з потенціалом p_{j-1}. На попередніх кроках для даної дуги був повністю визначений стовпчик (13) матриці $V_{m\times n}$, тобто розподіл дуг по шляхах графа. Очевидно, усі дуги, що виходять з вершини x_j (ненульові елементи матриці $S_{z\times z}$, будуть належати тим же шляхам, що й дуга d_{j-1}, при їх розподілу по шляхам у відповідності до потенціалів вершин, в які вони заходять. Процедура розподілу аналогічна до такої ж для 1-го кроку; відрізняється лише рівняння балансу потенціалів (для нашого прикладу) буде мати наступний вид:

$$p_j = q_{j+1} + q_{j+2}. \quad (15)$$

Спочатку у матриці $V_{m\times n}$ обирається стовпчик виходячої дуги d_{j-1}. Кожному підряд, починаючи з верхнього, ненульовому елементу даного стовпчика ставиться в стовпчик виходячої дуги d_{k+1} відповідна «1» (одиниця), поки її чисельність не досягне значення потенціалу q_{j+1} вершини x_{j+1}, після чого починається заповнення «1» (одиницями) стовпчика ви ходячої дуги d_{k+2} з наступного номера елемента стовпчика, поки їх чисельність не досягне значення потенціалу q_{k+2} вершини x_{k+2}. Якщо у стовпчику заходячої дуги d_j ще є ненульові елементи, то продовжується заповнення стовпчиків виходячих дуг, починаючи з дуги d_{k+1}. Цим забезпечується умова балансу потенціалів (15).

Далі у матриці $V_{m\times n}$обирається стовпчик наступної заходячої у вершину x_j дуги (у нашому прикладі – це дуги d_{k-2}, як наступного ненульового елемента у стовпчику x_jматриці суміжності. Аналогічним чином для виходячих дуг d_{k+1}, d_{k+2} заповнюються «1» (одиницями) відповідні до них стовпчики по одиничним елементам стовпчика заходячої дуги d_{k-2} матриці $V_{m\times n}$.

На останньому, (z-1)-му кроці в якості опорного обирається елемент головної діагоналі матриці суміжності $e_{(z-1)(z-1)} = 0$, який визначає стовпчик дуг, заходячих у вершину x_{z-1} з потенціалом $p_z = 1$. Тому усі одиничні елементи стовпчиків заходячих дуг матриці $V_{m\times n}$ просто копіюються у стовпчик ви ходячої дуги d_n:

$$v_{ij} = 1, i = \overline{1,m}, j = \overline{d_{k-2}, d_{n-2}}\,, \quad (16)$$

На цьому процедура розподілу дуг по шляхах графа закінчується. В результаті буде сформована структурна матриця «шляхи-операції» для завданого графом інцидентності процесу (5).

Наданий тут ефективний метод «потенціалів» для визначення елементів структурної матриці «шляхи-операції» процесу формалізується для процедур логіко-математичної обробки комп’ютерних засобів автоматизації управління складними процесами сітьового типу. Алгоритм процедури наступний:

vmn **початок** (головна програма)
ком(ентар) z –кількість вершин сітьового графа (станів процесу)
ком n – кількість дуг сітьового графа (операцій процесу)
ком m – кількість шляхів сітьового графа
ком G(z×z) – матриця суміжності вершин сітьового графа
ком D (n) – упорядкований (одномірний) масив дуг графа
ком V (m×n) – структурна матриця «шляхи-операції)
ком P (Q) – потенціали вершин сітьового графа
ком Ввід вихідних даних і оголошення масивів
ввід z,n
масиви g(z,z),p(z),d(n)
ком Опис процедур-підпрограм
stlb **початок**
m1 **ком** Продовження заповнення стовпчика

```
   цикл jk від k+1 до z
         якщо g(k,jk)>0 то початок
                             ps:=0; jj:=g(k,jk)
                    поки ps<p(jk) початок
                              якщо v(i,jj)>0 то початок
                                   v(i,jj):=jj; якщо k<(z-1) то ps:=ps+1
                                                    кінець
                            i:=i+1; якщо i>m то ps:=p(jk)
                                       кінець
                              кінець
кінець jk
якщо i<m то перехід m1
повернення (у головну програму)
diag      початок
    ком Процедура приводе матицю G до діагональної напівматриці
      обміном стрічок (стовпчиків)
ком r,s – поточні номера стрічок (стовпчиків) при їх обміні
ком Обмін стрічок
цикл i від 1 до n
  якщо (i<r або i>r) та  (i<s або i>s) то початок
                              rs:=g(i,r); g(i,r):=g(i,s); g(i,s):=rs
                                                 кінець
кінець i
ком Обмін стовпчиків (крім спряжених елементів)
цикл j від 1 до n
  якщо (j<r або j>r) та  (j<s або j>s) то початок
                              sr:=g(r,j); g(r,j):=g(s,j); g(s,j):=sr
                                                 кінець
кінець j
ком  Обмін спряжених елементів
rs:=g(r,s); g(r,s):=g(s,r); g(s,r):=rs
sr:=g(r,r); g(r,r):=g(s,s); g(s,s):=sr
повернення (у головну програму)
ком Робота головної програми
ком 1. Приведення вихідної матриці G до напівматриці
m8      i:=1
m7      якщо i>z то перехід m2
   j:=1
m6      якщо j=i то перехід m3
         якщо g(i,j) =0 або  g(i,j)=0 то перехід m4
          r:=i; s:=j
перехід m5
m4      j:=j+1; перехід m6
m3      i:=i+1; перехід m7
m5      звернення diag(r,s)
 перехід m8
m2      ком  Напівматриця сформована
        ком  2. Обчислення потенціалів вершин графа
   p(z):=1
   цикл i від (z-1) до 1 крок -1
            p(i):=0
            цикл j від (i+1) до z
```

```
                якщо g(i,j)>0 то p(i):=p(i)+1
        кінець j
кінець i
m:=p(1)
масиви  w(1,m), v[(1,m),(0,n)]
ком  3. Нумерація дуг графа
k:=0
цикл i від 2 до z
        цикл j від (i+1) до z
                якщо g(I,j)>0 то початок
                                        k:=k+1; d(k):=k; g(i,j):=k
                                          кінець
        кінець j
кінець i
n:=k
ком 4. Формування матиці V(m×n)
цикл i від 1 до m
         v(i,0):=1
кінець i
ком Перший крок
k:=1; j:=0
звернення stlb(k)
ком Перший крок
ком Подальші кроки
цикл k від 2 до (z-1)
        цикл ik від 1 до (k-1)
                i:=1
                якщо  g(ik,k)>0 то початок
                           j:=g(ik,k); звернення stlb(k)
кінець ik
кінець k
вивід v
кінець vmn
```

Висновок. Розроблений метод формування структурної матриці об'єкта дослідження дозволяє сформувати її за допомогою ефективної стандартної комп'ютерної процедури у складі спеціального математичного програмного забезпечення засобів автоматизації. Результативність, детермінованість і масовість алгоритму процедури доведені вирішенням контрольних прикладів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. Высшая школа. М., 1980.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций.Вища школа. Киев, 1975.

REFERENCES:

1. Y. Korshunov. Mathematical basis of cybernetics. Vysschaia shkola. M., 1980.
2. Y. Zaichenko. Operations analysis. Vyscha shkola. Kyiv, 1975.

Рецензент: д.військ.н., проф. Шарий В.І., Військовий інститут Київського національного університету імені Тараса Шевченка

к.т.н., с.н.с. Невольніченко А.І., к.т.н., доц. Пампуха І.В., к.філол.н., доц. Білан М.Б., к.т.н., с.н.с. Охрамович М.М.

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ МАТРИЦИ «ПУТИ-ОПЕРАЦИИ» ДЛЯ ГРАФА СЕТЕВОГО ТИПА

Для решения задач структурной оптимизации «объектов» исследования (семантических сетей в структурной лингвистике, маршрутов в «транспортных» сетях, процессов функционирования «сложных» систем) разработан метод «потенциалов» по определению элементов структурной матрицы «пути-операции» объекта исследование позволяет сформировать ее с помощью эффективной стандартной компьютерной процедуры в составе специального математического программного обеспечения (логико-математической обработки компьютерных средств автоматизации управления сложными процессами сетевого типа) средств автоматизации. Для реализации этого метода на компьютерных средств автоматизации управления разработан алгоритм. Результативность, детерминированность и массовость алгоритма процедуры доведены решением контрольных примеров.

Ключевые слова: граф, «пути-операции», «сложные» систем.

Ph.D. Nevolnichenko A.I., Ph.D. Pampukha I.V., Ph.D. Bilan M. B., Ph.D. Okhrymovych M.M.

FORMATION OF STRUCTURAL MATRIX «WAYS-OPERATIONS» FOR NETWORK GRAPH

To solve the problems of structural optimization of «objects» of research (semantic networks in structural linguistics, routes in «transportation» networks, the functioning of «complex» systems) a method of «potentials» has been developed to determine the elements of structural matrix «ways-operations» subject of research. It permits to form it using the effective standard computer procedure consisting of a special mathematical software (logical-mathematical processing of computer tools of control automation of management of complex network type processes) automation. The algorithm has been developed to implement this method in a computer control automation. The effectiveness, determinism and large-scale involvement of the algorithm of procedure have been proven by specific examples.

Keywords: graph, «ways-operations», «complex» systems.