

## **НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНО-КУТОВІ КОЛИВАННЯ ПІДРЕСОРЕНОЇ ТА НЕПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИН КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ТА ЇХ ВПЛИВ НА СТІЙКІСТЬ РУХУ**

*Розроблено методикау аналітичного дослідження впливу нелінійних поперечно-кутових коливань системи підресорена-непідресорена частини на стійкість руху колісних транспортних засобів вздовж криволінійних ділянок шляху. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, які описують динаміку відносного руху вказаної системи та побудовано перше наближення її аналітичного розв'язку. Особливістю коливань вказаних частин є те, що їх власні частоти залежать від амплітуд. Тому динамічна взаємодія між підресореною та непідресореною частинами, а також дорожнім покриттям та шинами визначаються амплітудно-частотними характеристиками коливань вказаних частин які зумовлені нерівностями шляху. Використовуючи рівняння кінестатики системи непідресорена-підресорена частини, визначено сили динамічної взаємодії пружних коліс із дорожнім покриттям – базові співвідношення для оцінки стійкості руху. Встановлено: відносні коливання підресореної та непідресореної частин транспортного засобу значною мірою зменшують критичні значення швидкості стійкого руху на перекидання; критичне значення швидкості стійкого руху на перекидання є більшим для більших величин статичної деформації пружних елементів та шин, а також прогресивної характеристики пружних елементів.*

*Отримані основні результати можуть служити базою для створення програмного продукту адаптивних підвісок, а їх достовірність підтверджується отриманням у граничному випадку результатів, які стосуються більш простих – лінійних розрахункових моделей динаміки транспортних засобів.*

*Ключові слова: колісний транспортний засіб, системи підресорювання, адаптивні підвіски, нелінійні поперечно-кутові коливання, амплітудно-частотні характеристики коливань, рівняння кінестатики.*

**Вступ.** Плавність ходу, стійкість руху, керованість, прохідність є основними експлуатаційними характеристиками колісних транспортних засобів (КТЗ) [1-7]. Вони визначаються силами взаємодії шин та дорожнього покриття, а також підресореної та непідресореної частин (ПЧ та НПЧ). Оцінка стійкості руху на базі “статичних” значень сил тиску шин на дорожнє покриття призводить до неточностей визначення критичних значень швидкості стійкого руху, керованості вздовж криволінійних ділянок шляху. Динамічна ж взаємодія коліс із дорожнім покриттям визначається коливаннями ПЧ та НПЧ, розподілом маси у транспортному засобі, станом шин та ін. Коливання вказаних частин КТЗ визначаються крім зовнішніх чинників (нерівностей шляху, які є однією із основних причин їх виникнення), силовими характеристиками системи підресорювання (СП) (пружними елементами та демпферними пристроями) та шин. У більшості КТЗ використовують СП у яких зв'язок між відновлювальними силами та деформаціями чи деформаціями та їх швидкостями описується нелінійними залежностями. Не дивлячись на це, базові аналітичні дослідження впливу на експлуатаційні характеристики закону зміни відновлювальних сил СП та пружних шин проведені для лінійних математичних моделей [8-14]. Що стосується аналітичних досліджень впливу нелінійної відновлювальної сили пружних елементів на плавність ходу, стійкість руху, керованість, прохідність, то проблема залишається відкритою через відсутність математичного апарату побудови аналітичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які описують механічну систему ПЧ та НПЧ КТЗ. Чисельна симуляція ж вказаних нелінійних диференціальних рівнянь не дає можливості зробити узагальнених висновків через низку їх властивостей. Тому існує проблема вибору мінімально можливих розрахункових моделей, які з одного боку максимально відображали б вплив основних властивостей СП КТЗ та шин на динаміку ПЧ та НПЧ, а з іншого – мали баналітичний розв'язок. Саме часткове

розв'язання вказаної загальної проблеми стосовно стійкості руху КТЗ вздовж криволінійних ділянок шляху розкривається у роботі.

**Аналіз останніх досліджень.** Більшість КТЗ спроектовані так, щоб вони були симетричними відносно вертикальної площини, яка проходить через центр мас ПЧ та НПЧ, а отже поперечно-кутові коливання для них не залежать від поздовжньо-кутових і навпаки [15]. Вказане, певною мірою, служить для спрощення розрахункових, а від так математичних моделей динаміки КТЗ у залежності від проблеми яка розглядається. Так для дослідження керованості руху у достатньо розглядати відносні поздовжньо-кутові коливання системи ПЧ та НПЧ, плавності ходу та прохідності – поздовжньо-кутові та вертикальні, стійкості руху – поперечно кутові [16-22].

Одним з ефективних шляхів розв'язання вказаної вище проблеми є метод математичного моделювання динамічного процесу із отриманням аналітичного розв'язку математичної моделі. Проте аналітичні дослідження пов'язані із урахуванням динаміки ПЧ та НПЧ, пов'язані із побудовою розв'язків системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Отримати в загальному випадку для них аналітичні співвідношення, які були б базою для оцінки впливу амплітудно-частотної характеристики коливань ПЧ та НПЧ на основні експлуатаційні характеристики є проблемою яку неможливо вирішити математично. Тому у низці праць [17-20], для часткового вирішення існуючих проблем максимально спрощували розрахункові моделі, обмежившись тільки урахуванням коливань ПЧ. В той же час, навіть із аналізу лінійних математичних моделей [23-26] випливає, що коливання НПЧ КТЗ значно впливають на основні експлуатаційні характеристики під час руху вздовж шляху із нерівностями.

Інший підхід побудований на експериментальних дослідженнях [12,13] впливу тих чи інших чинників на динаміку ПЧ із нелінійною силовою характеристикою СП, не може дати відповіді на низку важливих питань, які стосуються, зокрема, резонансних процесів під час руху КТЗ вздовж ж шляху із впорядкованою системою нерівностей; впливу поодиноких нерівностей на частоту коливань адже остання залежить від амплітуди та ін. Крім того, експериментальні дослідження потребують значного матеріального та часового ресурсу. Таким чином, найбільш ефективним способами дослідження впливу динаміки ПЧ та НПЧ на експлуатаційні характеристики є ті, в основу котрих покладено поєднання аналітичних результатів досліджень коливань вказаних частин із базовими положеннями стійкості, керованості та плавності руху. Саме такий підхід розвивається у роботі при дослідженні стійкості руху КТЗ вздовж криволінійної ділянки шляху із поодинокими нерівностями.

**Метою статті** є виведення аналітичних співвідношень, які визначають вплив на критичну швидкість стійкого руху основних параметрів, які описують силові характеристики СП, шин та динаміки ПЧ та НПЧ КТЗ для розрахункової схеми КТЗ (рис.1).

**Опис умов:** двовісний КТЗ із залежною підвіскою з нерозрізним мостом рухається криволінійною ділянкою шляху із низькочастотним дорожнім профілем зі сталими швидкістю  $V$  та радіусом кривини ділянки шляху  $\rho$ .

Необхідно визначити критичні значення швидкості стійкого руху з огляду на занесення і перекидання із урахуванням коливань ПЧ та НПЧ. За розрахункову схему КТЗ приймається двомасова плоска система (рис.1): підресорена частина (ПЧ) - 1, непідресорена частина (НПЧ) - 2. Відносний рух вказаних частин здійснюється у вертикальній площині, а взаємодіють між собою вказані частини за рахунок пружних елементів (3) та демпферних пристроїв (4). Із дорожнім покриттям КТЗ взаємодіє шиною (5). Вважається, що переміщення центрів мас ПЧ та НПЧ за рахунок наїзду коліс правого чи лівого бортів є значно меншими за переміщення всіх інших точок відповідних частин. Така "мінімальна модель", як буде показано нижче, дозволяє отримати аналітичну залежність для визначення впливу коливань ПЧ та НПЧ на стійкість руху, а в подальшому може бути узагальнена і досліджена на інших експлуатаційних характеристиках. Щодо пружних властивостей шин ( $F_{1i}$ ) і пружних елементів ( $F_{2i}$ ), то вони залежать від їх деформацій, в подальшому приймемо

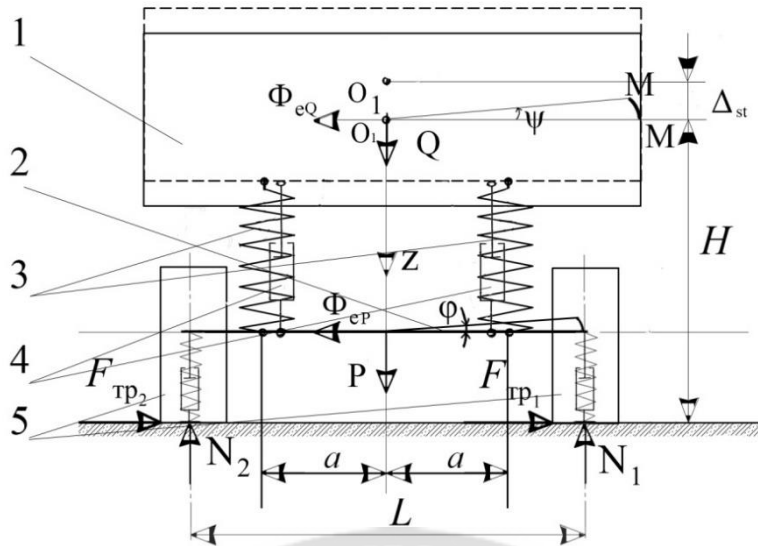


Рисунок 1 - Розрахункова схема КТЗ

ці деформації як  $(\Delta_{1i}, \Delta_{2i})$  і описуються вони відповідно залежностями  $F_{1i} = c_1(\Delta_{1i})^{v_1+1}$  та  $F_{2i} = c_2(\Delta_{2i})^{v_2+1}$ , а сили в'язкого тертя шин та демпферних пристроїв пропорційні до швидкості їх деформацій  $\dot{\Delta}_{1i}$  чи  $\dot{\Delta}_{2i}$  у степені  $2s_i + 1$ :  $R_{1i} = \alpha_1(\dot{\Delta}_{1i})^{2s_1+1}$ ,  $R_{2i} = \alpha_2(\dot{\Delta}_{2i})^{2s_2+1}$  ( $i = 1$  для шин, пружних елементів і демпферних пристроїв правого борта і відповідної  $= 2$  - лівого борта,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - відомі сталі). Щодо параметрів  $v_1$  та  $v_2$ , які вказують на відхилення пружних властивостей шин і пружних елементів від лінійного закону, то вони додатково повинні задовольняти умовам існування у ПЧ та НПЧ коливального процесу. Це буде справджуватись якщо  $v_s + 1 = \frac{2m_s + 1}{2n_s + 2}$ ,  $m_s, n_s = 0, 1, 2, \dots$ . За допомогою вказаних функцій вдається описати силові характеристики шин та пружних елементів широкого спектру КТЗ.

**Виклад основного матеріалу.** Для розв'язання поставленої задачі перш за все необхідно описати динаміку відносного руху вказаних частини КТЗ. За наведених вище припущень математична модель відносного руху має два ступені вільності (свободи). За узагальнені координати для неї приймаються кути повороту відповідних частин навколо поздовжніх осей які проходять через центри мас відповідних частин у відносному статичному їх положенні:  $\varphi(t)$ - непідресореної частини,  $\psi(t)$ - підресореної частини. Для того щоб отримати узагальнені сили, які відповідають вказаним узагальненим координатам перш за все

визначимо статичні деформації вказаних частин:  $\Delta_{1st.} = \left( \frac{P+Q}{2c_1} \right)^{\frac{1}{v_1+1}}$  - статична деформація шин;

$\Delta_{2st.} = \left( \frac{Q}{2c_2} \right)^{\frac{1}{v_2+1}}$  - статична деформація пружних елементів,  $P$  та  $Q$  - ваги відповідно НПЧ та ПЧ. Тоді деформації шин правого і лівого бортів у довільний момент часу приймають значення

$$\Delta_{11} = \Delta_{1st.} - \frac{L}{2} \varphi(t), \quad \Delta_{12} = \Delta_{1st.} + \frac{L}{2} \varphi(t).$$

Подібним чином знаходимо деформації пружних елементів правого та лівого бортів у довільний момент часу. Таким чином, узагальнені сили які відповідають прийнятим

узагальненим координатам двомасової системи яка розглядається приймають вигляд системи рівнянь (1)

$$\begin{aligned} Q_{\varphi} &= -c_2 a (\Delta_{st.} - \psi a - \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} - c_2 a (\Delta_{st.} + \psi a - \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} - c_1 \frac{L}{2} \left( \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} + c_1 \frac{L}{2} \left( \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} \\ Q_{\psi} &= c_2 (\Delta_{st.} - \psi(t)a - \Delta_{1st.} + \varphi(t) \frac{L}{2})^{v_2+1} - c_2 (\Delta_{st.} + \psi(t)a - \Delta_{1st.} - \varphi(t) \frac{L}{2})^{v_2+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

а від так диференційні рівняння відносного руху прийнятої розрахункової моделі набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned} I_{c1} \ddot{\varphi} &= -c_2 a \left\{ (\Delta_{st.} - \psi a - \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} + (\Delta_{st.} + \psi a - \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} \right\} - c_1 \frac{L}{2} \left\{ \left( \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} - \left( \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} \right\} \\ I_c \ddot{\psi} &= c_2 a (\Delta_{st.} - \psi a - \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} - c_2 a (\Delta_{st.} + \psi a - \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} + R_{\psi}(\dot{\psi}, \dot{\varphi}), \end{aligned} \quad (2)$$

$I_c$ ,  $I_{c1}$  моменти інерції ПЧ та НПЧ КТЗ відносно поздовжніх осей, які проходять через їх центри мас,  $R_{\psi}(\dot{\psi}, \dot{\varphi})$  та  $R_{\varphi}(\dot{\psi}, \dot{\varphi})$  - відповідно моменти сил опору демпферних пристроїв та в'язких сил шин відносно вказаних вище осей.

Для знаходження динамічного тиску шин на опорну поверхню перш за все необхідно знайти амплітудно-частотну характеристику двомасової системи що розглядається, а це пов'язано із побудовою аналітичного розв'язку системи диференціальних рівнянь (2).

**Методика побудови аналітичного розв'язку математичної моделі системи ПЧ та НПЧ КТЗ.** Базою для побудови наближеного аналітичного розв'язку системи диференціальних рівнянь є наступні фізично обґрунтовані положення, які мають місце для руху КТЗ вздовж довільних ділянок шляху: а) максимальні значення сил опору демпферних пристроїв СП є значно меншими від максимальних значень сил пружних елементів; б) коефіцієнти "жорсткості" шин є значно більшими ніж відповідні коефіцієнти пружних елементів, тобто  $c_1 \gg c_2$ . Це впливає із того, що для всіх КТЗ статичні деформації шин є значно меншими від статичних деформацій СП. Наведене дозволяє представити систему диференціальних рівнянь (2) не змінюючи її точності у вигляді:

$$\begin{aligned} I_{c1} \ddot{\varphi} + c_1 L \left( \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} &= c_2 a \left\{ (\Delta_{st.} - \psi a - \Delta_{1st.} + \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} + (\Delta_{st.} + \psi a - \Delta_{1st.} - \varphi \frac{L}{2})^{v_2+1} \right\} + R_{\varphi}(\dot{\psi}, \dot{\varphi}) \\ I_c \ddot{\psi} + 2c_2 a (a\psi)^{v_2+1} &= 2c_2 a (v_2 + 1) (a\psi)^{v_2} \varphi L + R_{\psi}(\dot{\psi}, \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (3)$$

Виходячи із наведеної порівняльної оцінки основних характеристик СП та пружних шин впливає, що максимальні значення правих частин системи диференціальних рівнянь (3) є значно меншими від максимальних значень відповідних других доданків лівих частин. Останнє є обґрунтуванням застосування загальних ідей методів збурень [27, 28] під час побудови розв'язку системи нелінійних рівнянь (3).

**Власні коливання незбуреного руху ПЧ та НПЧ КТЗ.** Ефективність застосування методів збурень нелінійних диференціальних рівнянь залежить від можливості побудови і розв'язку відповідної системи незбурених рівнянь. Для випадку, що розглядається це нелінійні диференціальні рівняння (4):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{c_1 L}{I_{c1}} \left( \varphi \frac{L}{2} \right)^{v_1+1} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \frac{2c_2 a}{I_c} (a\psi)^{v_2+1} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Їх розв'язки виражаються [17, 18] через періодичні Атеб-функції [29-31] у вигляді системи (5):

$$\varphi = a_\varphi \left\{ \begin{array}{l} sa \left( v_1 + 1,1, \omega_\varphi(a_\varphi) t + \gamma_0 \right) \\ ca \left( v_1 + 1,1, \omega_\varphi(a_\varphi) t + \bar{\gamma}_0 \right) \end{array} \right\}, \vartheta_\varphi = \omega_\varphi(a_\varphi) t + \gamma,$$

$$\psi = a_\psi \left\{ \begin{array}{l} sa \left( v_2 + 1,1, \omega_\psi(a_\psi) t + \phi_0 \right) \\ ca \left( v_2 + 1,1, \omega_\psi(a_\psi) t + \bar{\phi}_0 \right) \end{array} \right\}, \vartheta_\psi = \omega_\psi(a_\psi) t + \phi, \quad (5)$$

у яких  $a_\psi$ ,  $a_\varphi$ ,  $\vartheta_\psi$ ,  $\vartheta_\varphi$  відповідно амплітуди та фази коливань незбуреного руху ПЧ та НПЧ,  $\phi$ ,  $\gamma$  - початкові фази незбуреного руху. Що стосується власних частот  $\omega_\psi(a_\psi)$ ,  $\omega_\varphi(a_\varphi)$ , то вони як і для більшості нелінійних коливних систем залежать від амплітуд відповідних частин і приймають значення:

$$\omega_\psi(a_\psi) = \sqrt{\frac{(v_2 + 2)c_2 a^{v_2 + 2}}{I_C}} a_\psi^{\frac{v_2}{2}}, \quad \omega_\varphi(a_\varphi) = \sqrt{\frac{2(v_1 + 2)c_1 \left(\frac{L}{2}\right)^{v_2 + 2}}{I_{C1}}} a_\varphi^{\frac{v_1}{2}}.$$

Для інженерного використання більш зручними є залежності для частот від амплітуд відповідних частин, які враховують статичні деформації пружних елементів. Тому якщо, використати вказані параметри, які характеризують пружні елементи СП та шини, отримуємо наступне співвідношення:

$$\omega_\psi(a_\psi) = \sqrt{\frac{(v_2 + 2)Qa \left(\frac{a}{\Delta_{st}}\right)^{v_2 + 1}}{2I_C}} a_\psi^{\frac{v_2}{2}}, \quad \omega_\varphi(a_\varphi) = \sqrt{\frac{(v_1 + 2)L(P + Q) \left(\frac{L}{2\Delta_{1st}}\right)^{v_1 + 1}}{2I_{C1}}} a_\varphi^{\frac{v_1}{2}} \quad (6)$$

На рис.2, рис.3 представлено залежності власних частот коливань у герцах ( $f_\psi = \frac{1}{2\pi_2} \omega_\psi(a_\psi)$ ,  $f_\varphi = \frac{1}{2\pi_1} \omega_\varphi(a_\varphi)$ ,  $\pi_1 = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{v_1 + 2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{v_1 + 2}\right)$ ) від амплітуд відповідних частин за різних значень статичних деформацій ПЧ та НПЧ при наступних параметрах КТЗ  $Q = 40000$  Н,  $P = 5000$  Н,  $L = 2.5$  м,  $I_{C1} = 2000$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_C = 10000$  кг · м<sup>2</sup>.

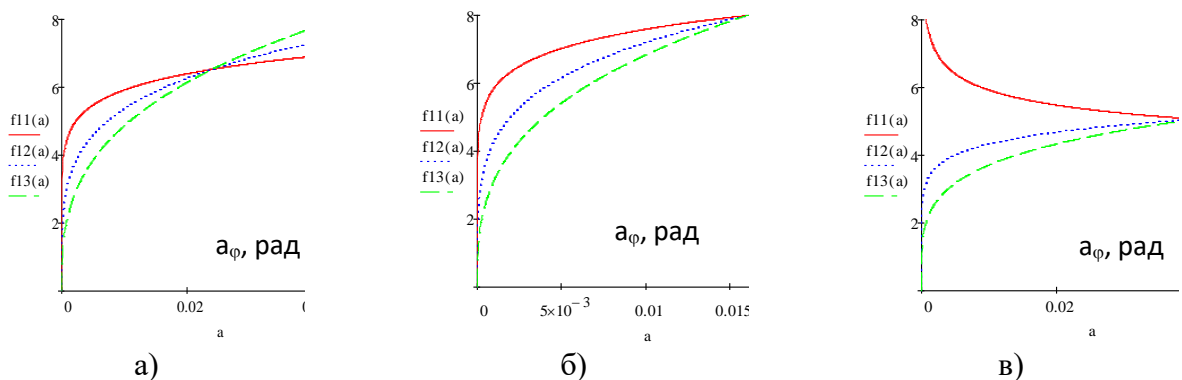


Рисунок 2 - Залежність частоти поперечно-кутових коливань НПЧ від її амплітуди коливань при

- а)  $\nu_1 = \frac{2}{9}$  черв,  $\nu_1 = \frac{4}{9}$  синє,  $\nu_1 = \frac{2}{3}$  зелен,  $\Delta_{1st} = 0.03\text{м}$ ;
- б)  $\nu_1 = \frac{2}{9}$  черв,  $\nu_1 = \frac{4}{9}$  синє,  $\nu_1 = \frac{2}{3}$  зелен,  $\Delta_{1st} = 0.02\text{м}$ ;
- в)  $\nu_1 = \frac{-2}{9}$  черв,  $\nu_1 = \frac{2}{9}$  синє,  $\nu_1 = \frac{4}{3}$  зелен,  $\Delta_{1st} = 0.05\text{м}$ .

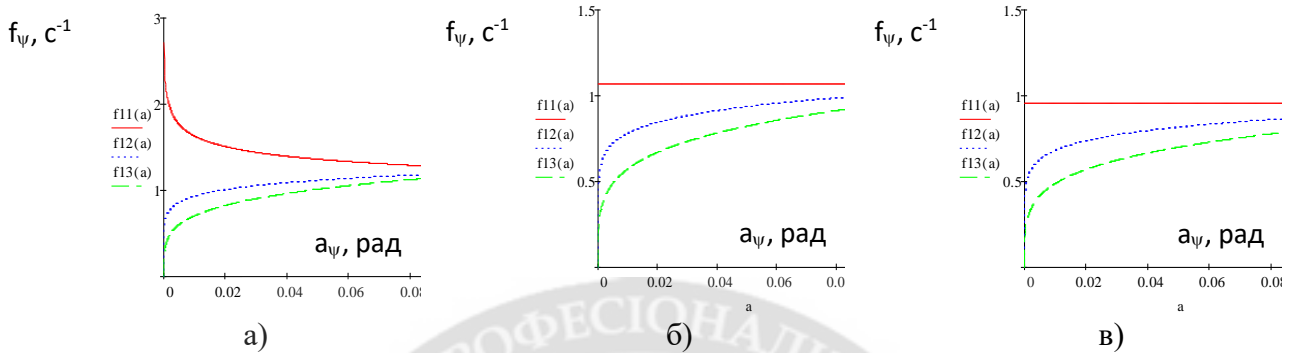


Рисунок 3 - Залежність частоти поперечно-кутових коливань ПЧ від її амплітуди коливань

- а)  $\nu_2 = \frac{-2}{9}$  черв  $\nu_2 = \frac{2}{9}$  синє  $\nu_2 = \frac{4}{3}$  зелен  $\Delta_{st} = 0.15\text{м}$  ;
- б)  $\nu_2 = \frac{0}{9}$  черв  $\nu_2 = \frac{2}{9}$  синє  $\nu_2 = \frac{4}{9}$  зелен  $\Delta_{st} = 0.2\text{м}$  ;
- в)  $\nu_2 = \frac{0}{9}$  черв  $\nu_2 = \frac{2}{9}$  синє  $\nu_2 = \frac{4}{9}$  зелен  $\Delta_{st} = 0.25\text{м}$  .

Представлені результати показують, що для регресивних характеристик СП та пружних шин для більших величин амплітуд коливань власні частоти відповідних частин є меншим і одночасно для прогресивних – більшими, одночасно для більших величин статичних деформацій власні частоти є меншими.

Співвідношення (5), (6) є одночасно базою для визначення впливу демпферних пристроїв та сил в'язкого тертя на амплітудно-частотну характеристику коливань ПЧ та НПЧ КТЗ, а також величин початкових значень амплітуд коливань підресореної та невідресореної частин.

**Методика визначення впливу сил демпферних пристроїв СП та в'язко-пружних сил шин на амплітудно-частотну характеристику коливань КТЗ.** Отриманий у зв'язок між частотами власних коливань ПЧ та НПЧ та їх амплітудами не враховує впливу сил опору демпферних пристроїв СП та в'язко-пружних сил шин. Як показано у [29], за малого максимального значення вказаних та іншої природи нелінійних сил у порівнянні із максимальним значенням відновлювальної сили амплітуда та частота коливального процесу є повільно-змінною функцією часу. Для знаходження законів зміни в часі цих функцій узагальнимо основні ідеї методу Ван-дер-Поля на систему диференціальних рівнянь (3). Це дозволяє розв'язок розглядуваної системи нелінійних диференціальних рівнянь шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi &= a_\varphi(t) \text{sa}(\nu_1 + 1, 1, \vartheta_\varphi(t)), \dots \vartheta_\varphi(t) = \omega_\varphi(a_\varphi) t + \gamma(t), \\ \psi &= a_\psi(t) \text{sa}(\nu_2 + 1, 1, \vartheta_\psi(t)), \quad \vartheta_\psi(t) = \omega_\psi(a_\psi) t + \phi(t), \end{aligned} \quad (7)$$

де невідомі функції часу  $a_\varphi(t)$ ,  $a_\psi(t)$ ,  $\vartheta_\varphi(t)$ ,  $\vartheta_\psi(t)$  знаходяться так, щоб співвідношення (7) задовольняло вихідній системі диференціальних рівнянь (3).

**Примітка.** У залежностях (7) та нижче за розв'язок незбурених рівнянь (4) приймаються перші (верхні) залежності співвідношень (5). Це не накладає якісь обмеження на методику знаходження невідомих функцій  $a_\varphi(t)$ ,  $a_\psi(t)$ ,  $\vartheta_\varphi(t)$ ,  $\vartheta_\psi(t)$ .

Щоб знайти закони зміни вказаних невідомих функцій шляхом диференціювання співвідношень (6) за часом перш за все, знайдемо із урахуванням наведеного, похідні за часом функцій, які будуть описувати збурений рух обох частин КТЗ – система рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{da_\varphi}{dt} sa(v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) + \frac{2a_\varphi}{v_1+2} \frac{d\vartheta_\varphi(t)}{dt} ca(1, v_1+1, \vartheta_\varphi(t)), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{da_\psi}{dt} sa(v_2+1, \vartheta_\psi(t)) + \frac{2a_\psi}{v_2+2} \frac{d\vartheta_\psi(t)}{dt} ca(1, v_2+1, \vartheta_\psi(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Наступним диференціюванням за часом наведених залежностей знаходимо  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  та

$\frac{d^2\psi}{dt^2}$  таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} &= -\frac{2\omega_\varphi^2(a_\varphi)}{v_1+2} a_\varphi sa^{v_1+1}(v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) - \frac{2}{v_1+2} \frac{da_\varphi}{dt} \left[ \omega_\varphi(a_\varphi) + a \frac{d\omega_\varphi(a_\varphi)}{da_\varphi} \right] ca(1, v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) \\ &\quad - \frac{2\omega_\varphi(a_\varphi)}{v_1+2} \frac{d\vartheta_\varphi}{dt} a_\varphi sa(v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) \\ \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} &= -\frac{2\omega_\psi^2(a_\psi)}{v_2+2} a_\psi sa^{v_2+1}(v_2+1, \vartheta_\psi(t)) - \frac{2}{v_2+2} \frac{da_\psi}{dt} \left[ \omega_\psi(a_\psi) + a \frac{d\omega_\psi(a_\psi)}{da_\psi} \right] ca(1, v_2+1, \vartheta_\psi(t)) \\ &\quad - \frac{2\omega_\psi(a_\psi)}{v_2+2} \frac{d\vartheta_\psi}{dt} a_\psi sa(v_2+1, \vartheta_\psi(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

У співвідношеннях (8) враховано, що відповідно до методу Ван-дер-Поля мають справджуватись співвідношення:  $\frac{da_\psi}{dt} ca(v_2+1, \vartheta_\psi(t)) - \frac{2}{v_2+2} \frac{d\vartheta_\psi}{dt} sa(1, v_2+1, \vartheta_\psi(t)) = 0$  та

$\frac{da_\varphi}{dt} ca(v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) - \frac{2}{v_1+2} \frac{d\vartheta_\varphi}{dt} sa(1, v_1+1, \vartheta_\varphi(t)) = 0$ . Крім цього, безпосередньою перевіркою

переконуємось, що для коливань ПЧ та НПЧ КТЗ власні частоти у випадку, коли пружні властивості елементів системи підвіски описуються розглядуваним типом нелінійностей,

задовольняють тотожностям  $\omega_\psi(a_\psi) + a_\psi \frac{d\omega_\psi(a_\psi)}{da_\psi} \equiv \frac{v_2+2}{2} \omega_\psi(a_\psi)$  та

$\omega_\varphi(a_\varphi) + a_\varphi \frac{d\omega_\varphi(a_\varphi)}{da_\varphi} \equiv \frac{v_1+2}{2} \omega_\varphi(a_\varphi)$ . Наведене у сукупності дозволяє отримати звичайні

диференціальні рівняння для визначення закону зміни амплітуд згасаючих коливань ПЧ та НПЧ

$$\begin{aligned}
\frac{da_\varphi}{dt} &= \frac{ca(1, v_1 + 1, \vartheta_\varphi)}{I_{c_1} \omega_\varphi(a_\varphi)} f_\varphi(a_\psi, a_\varphi, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi), \\
\frac{d\vartheta_\varphi}{dt} &= \omega_\varphi(a_\varphi) + \frac{2sa^{v_1+1}(v_1 + 1, 1, \vartheta_\varphi)}{a_\varphi(v_1 + 2)\omega_\varphi(a_\varphi)I_{c_1}} f_\varphi(a_\psi, a_\varphi, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi) \\
\frac{da_\psi}{dt} &= \frac{ca(1, v_2 + 1, \vartheta_\psi)}{I_c \omega_\psi(a_\psi)} f_\psi(a_\psi, a_\varphi, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi), \\
\frac{d\vartheta_\psi}{dt} &= \omega_\psi(a_\psi) + \frac{2sa^{v_2+1}(v_2 + 1, 1, \vartheta_\psi)}{a_\psi(v_2 + 2)\omega_\psi(a_\psi)I_c} f_\psi(a_\psi, a_\varphi, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi),
\end{aligned} \tag{10}$$

де функції  $f_\varphi(a_\psi, a_\varphi, a_z, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi, \vartheta_z)$  та  $f_\psi(a_\psi, a_\varphi, a_z, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi, \vartheta_z)$  відповідають значенням правих частин диференціальних (3) за умови, що в них  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$  і їх похідні визначаються відповідно до залежностей (6), (7).

Отримані залежності показують що: а) за деяких кінематичних параметрів системи ПЧ-НПЧ та силових характеристик підвіски та шин у розглядуваній моделі динаміки КТЗ можливий внутрішній резонанс [32]. Це питання може бути предметом окремих досліджень; б) амплітуди коливань ПЧ та НПЧ за період коливань підресорених чи не підресорених частин змінюються на малу величину. Вказане є підставою для усереднення за фазами коливань  $\vartheta_\psi, \vartheta_\varphi$  правих частин рівнянь (10), отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{da_\psi}{dt} &= -\frac{(\alpha_2)a_\psi \left( \frac{2a_\psi \omega_\psi(a)}{(v_2 + 2)} \right)^{2s_2}}{\Pi_2 I_c} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v_2 + 2}\right) \Gamma\left(\frac{2s_2 + 2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{v_2 + 2} + \frac{2s_2 + 2}{2}\right)}, \\
\frac{d\vartheta_\psi}{dt} &= \sqrt{\frac{(v_2 + 2)c_2 a^{v_2+2}}{I_c}} \frac{v_2}{a_\psi^2}, \\
\frac{da_\varphi}{dt} &= -\frac{(\alpha_2)a_\varphi \left( \frac{2a_\varphi \omega_\varphi(a_\varphi)}{(v_1 + 2)} \right)^{2s_1}}{\Pi_1 I_{c_1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v_1 + 2}\right) \Gamma\left(\frac{2s_1 + 2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{v_1 + 2} + \frac{2s_1 + 2}{2}\right)}, \\
\frac{d\vartheta_\varphi}{dt} &= \sqrt{\frac{(v_1 + 2)c_1 a^{v_1+2}}{I_{c_1}}} \frac{v_1}{a_\varphi^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким чином, для першого наближення коливальний процес системи ПЧ та НПЧ описується залежностями (6) у яких параметри  $a_\psi, a_\varphi, \vartheta_\psi, \vartheta_\varphi$  зв'язані системою диференціальних рівнянь першого порядку (11). Для однозначного описання його необхідно додатково вказати для диференціальних рівнянь (11) початкові умови.

Відомо, що причиною коливань ПЧ та НПЧ є нерівності шляху. Вважається, що відстань між ними є такою, що після подолання транспортним засобом однієї із них завдяки наявним демпферним пристроям та силам в'язкого тертя шин у момент контакту шини із наступною нерівністю коливання обох частин припиняються. Це дозволяє за початкові умови для системи диференціальних рівнянь вибирати ті, які узгоджуються із "реакцією" шини у момент контакту її із нерівністю. Приймаючи до уваги, що під час руху КТЗ:

- шина безвідривно контактує із нерівністю шляху;
- нерівність шляху незначної довжини;

- транспортний засіб рухається зі сталою за величиною швидкістю  $V$  (швидкість переносного руху КТЗ)

- із достатнім ступенем точності можна вважати, що відносна складова швидкості НПЧ КТЗ у момент наїзду колеса на нерівність рівна проекції швидкості руху КТЗ на вертикаль.

Таким чином, базою для визначення початкової амплітуди поперечно-кутових коливань є співвідношення:  $V \sin \beta = \frac{L}{2} \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0}$ ,  $\beta$  - кут нахилу до горизонтально ділянки шляху

дотичної до нерівності у точці контакту шини і нерівності. Приймаючи до уваги залежності (6) - (8) та наведене вище отримуємо

$$\frac{L}{2} \left\{ \frac{da_{\varphi}}{dt} sa(v_1 + 1, \omega_{\varphi}(a_{\varphi})t) + \frac{2a_{\varphi}}{v_1 + 2} \omega_{\varphi}(a_{\varphi}) ca(1, v_1 + 1, \omega_{\varphi}(a_{\varphi})t) \right\} \Big|_{t=0} = V \sin \beta. \quad (12)$$

Алгебраїчне рівняння (12) дозволяє визначити початкове значення амплітуди коливань НПЧ КТЗ зумовлене нерівністю шляху

$$a_{\varphi}|_{t=0} = \left\{ \frac{1}{L} V \sin \beta \sqrt{\frac{2(v_1 + 2)I_{C1}}{L(P+Q)} \left( \frac{2\Delta_{1st}}{L} \right)^{v_1+1}} \right\}^{\frac{2}{v_1+2}} \quad (13)$$

Подібним чином і знаходиться початкове значення амплітуди поперечно-кутових коливань підресореної частини. Умовою для її знаходження є рівність швидкостей точок приєднання пружних елементів до НПЧ та ПЧ у початковий момент часу. Отримуємо:

$$a_{\psi}|_{t=0} = \left\{ \frac{V \sin \beta}{L} \sqrt{\frac{2(v_2 + 2)I_C}{Q} \left( \frac{\Delta_{st}}{a} \right)^{v_2+1}} \right\}^{\frac{2}{v_2+2}} \quad (14)$$

Таким чином, АЧХ коливань ПЧ та НПЧ описується звичайними диференціальними рівняннями (11) за початкових умов (13) та (14).

### Методика визначення впливу коливань ПЧ та НПЧ на критичне значення швидкості стійкого руху КТЗ вздовж криволінійної ділянки шляху

Критичні значення швидкості стійкого руху з огляду на перекидання визначаються величиною динамічної взаємодії шин із дорожнім покриттям. Базою для аналітичної оцінки вказаної взаємодії можуть служити рівняння кінетостатики системи ПЧ та НПЧ та отримані вище аналітичні співвідношення, які описують кінематику відносного руху вказаних частин. Щодо рівнянь кінетостатики розглядуваної системи, то вони для випадку руху КТЗ вздовж криволінійної ділянки зі сталою за величиною швидкістю приймають вигляд

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 - P - Q &= 0, \\ F_1 + F_2 - \Phi_P - \Phi_Q &= 0, \\ N_1 L - (P + Q) \frac{L}{2} + M_{KQ}^{\Phi} + M_{KP}^{\Phi} + \Phi_P H_{C1} + \Phi_Q H_C &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\Phi_Q, \Phi_P$  - головні вектори сил інерції переносного руху ПЧ та НПЧ;  $M_{KQ}^{\Phi}, M_{KP}^{\Phi}$  - головні моменти сил інерції вказаних частин відносно точки контакту шини лівого борта та дорожнього покриття;  $N_i$  та  $F_i$  - відповідно вертикальні та горизонтальні складові дії дорожнього покриття на колесо правого ( $i = 1$ ) чи лівого ( $i = 2$ ) бортів;  $H_{C1}, H_C$  віддалі до дорожнього покриття центрів мас не підресореної та підресореної частин.

Відповідно до визначення головні вектори сил інерції переносного руху ПЧ та НПЧ рівні  $\Phi_Q = \frac{Q}{g} \frac{V^2}{\rho}$ ,  $\Phi_P = \frac{P}{g} \frac{V^2}{\rho}$  - головні ж моменти сил інерції ПЧ та НПЧ визначаються залежностями

$$\begin{aligned} M_{K,Q}^{\Phi} &= I_{K,Q} \frac{d^2\psi}{dt^2} = I_{K,Q} \frac{2\omega_{\psi}^2(a_{\varphi})}{v_2+2} a_{\psi} s a^{v_2+1} (v_2+1, 1, \vartheta_{\psi}), \\ M_{K,P}^{\Phi} &= I_{K,P} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_{K,P} \frac{2\omega_{\varphi}^2(a_{\varphi})}{v_1+2} a_{\varphi} s a^{v_1+1} (v_1+1, 1, \vartheta_{\varphi}), \end{aligned} \quad (16)$$

де  $I_{K,Q}$ ,  $I_{K,P}$  - моменти інерції ПЧ та НПЧ відносно точки контакту шини лівого борту і дорожнього покриття:  $I_{K,Q} = I_C + \frac{Q}{g} \left( H_C^2 + \frac{L^2}{4} \right)$ ,  $I_{K,P} = I_{C_1} + \frac{P}{g} \left( H_{C_1}^2 + \frac{L^2}{4} \right)$ . Якщо підставити вказані значення сил інерції та їх моментів у рівняння кінетостатики обмежившись у них максимальними значеннями, отримуємо

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 - P - Q &= 0, \\ F_1 + F_2 - \frac{V^2}{\rho} \left( \frac{P}{g} + \frac{Q}{g} \right) &= 0, \\ N_1 L - (P+Q) \frac{L}{2} + I_{K,Q} \frac{2\omega_{\psi}^2(a_{\varphi})}{v_2+2} a_{\psi} + I_{K,P} \frac{2\omega_{\varphi}^2(a_{\varphi})}{v_1+2} a_{\varphi} + \frac{V^2}{\rho} \left( \frac{P}{g} H_{C_1} + \frac{Q}{g} H_C \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отримані вище співвідношення є базовими для визначення критичних значень швидкості стійкого руху з огляду на перекодування та зсув.

Умовою для визначення критичної швидкості з огляду на перекидання трансформованою для розглядуваної розрахункової моделі є  $N_1 = 0$ . Із урахуванням вказаного отримуємо

$$V = \sqrt{\frac{(P+Q) \frac{L}{2} - I_{K,Q} \frac{2\omega_{\psi}^2(a_{\varphi})}{v_2+2} a_{\psi} - I_{K,P} \frac{2\omega_{\varphi}^2(a_{\varphi})}{v_1+2} a_{\varphi}}{P H_{C_1} + Q H_C}} \rho g \quad (18)$$

Окремим випадком отриманої залежності при  $a_{\varphi} = 0$  є критичне значення швидкості стійкого руху з огляду на перекидання без урахування коливань НПЧ. На рис. 4. представлено, відповідно до залежності (18), залежність критичної з огляду на перекидання швидкості стійкого руху.

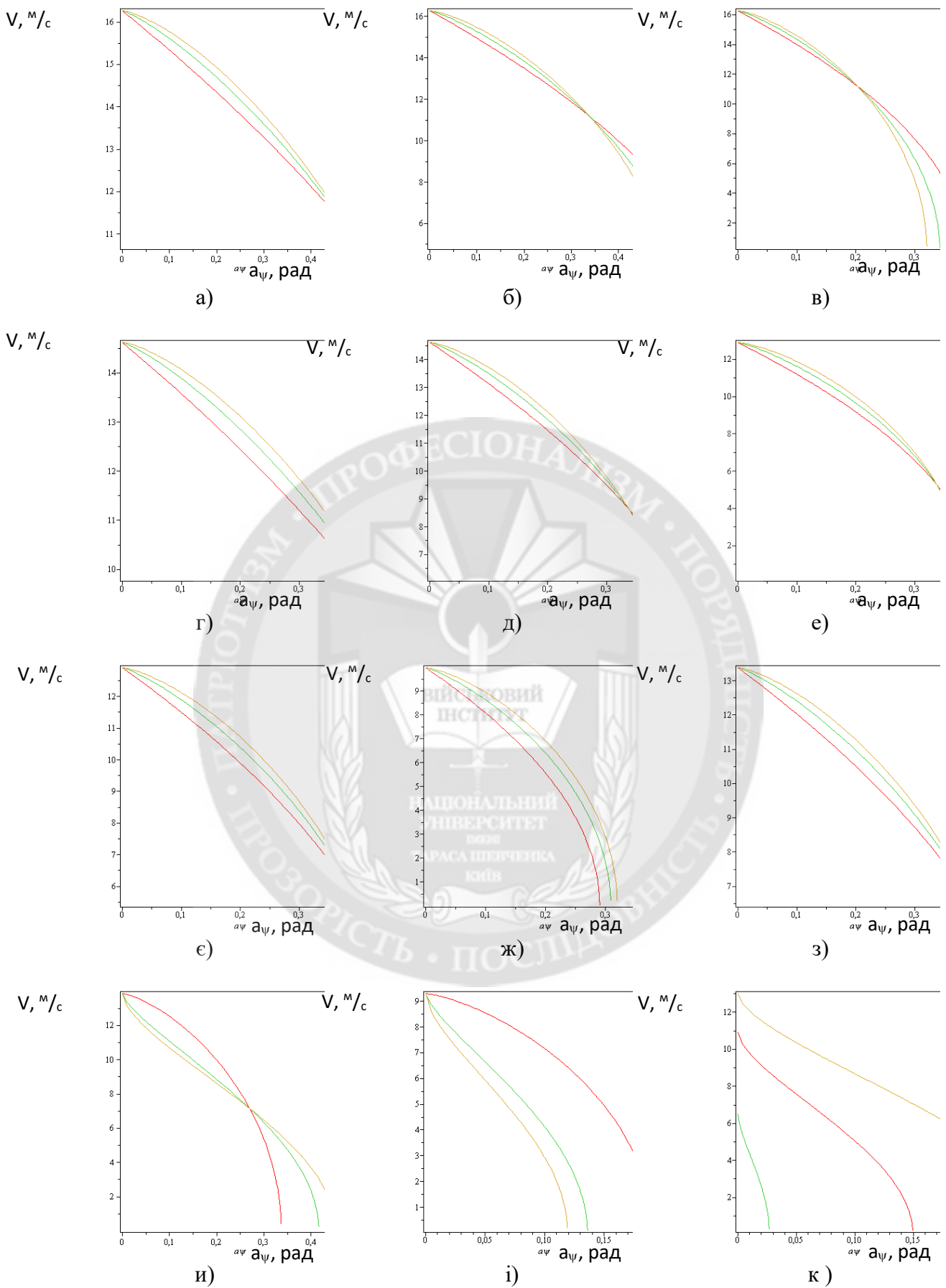


Рисунок 4 - Залежність критичного значення швидкості від амплітуди коливань ПЧ за різних силових характеристик СП та пружних шин

- а)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.35\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0$ ,  $\Delta_1 = 0.01\text{м}$  ;
- б)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зел,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.25\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0$ ,  $\Delta_1 = 0.01\text{м}$  ;
- в)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.15\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0$ ,  $\Delta_1 = 0.03\text{м}$  ;
- г)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.3\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.05\text{м}$  ;
- д)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.25\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.05\text{м}$  ;
- е)  $v_2 = 0$  черв  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич  $v_1 = \frac{2}{7}$   $\Delta = 0.3\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.03\text{м}$  ;
- ж)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.3\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,015$ ,  $\Delta_1 = 0.03\text{м}$  ;
- з)  $v_2 = 0$  черв,  $v_2 = \frac{2}{9}$  зелене,  $v_2 = \frac{2}{3}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.3\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.05\text{м}$  ;
- и)  $v_2 = \frac{2}{3}$  черв,  $v_2 = \frac{-2}{7}$  зелене,  $v_2 = \frac{-2}{5}$  корич,  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.2\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.04\text{ м}$  ;
- і)  $v_2 = \frac{2}{3}$  черв,  $v_2 = \frac{-2}{7}$  зелене,  $v_2 = \frac{-2}{5}$  корич,  $v_1 = \frac{-2}{7}$ ,  $\Delta = 0.2\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.04\text{ м}$  ;
- к)  $v_2 = \frac{-2}{5}$ ,  $v_1 = 0$  черв,  $v_1 = \frac{2}{11}$  зелене,  $v_1 = \frac{-2}{11}$  корич,  $\Delta = 0.15\text{м}$ ,  $a_\varphi = 0,01$ ,  $\Delta_1 = 0.06\text{ м}$ .

Представлені графічні залежності показують, що критичне значення швидкості з огляду на перекидання:

- без урахування коливань НПЧ є більшим для СП із більшою величиною статичної деформації пружних елементів. Збільшення статичної деформації пружних елементів від 0.15 м. до 0.25 м. спричиняє зростання критичної швидкості на 27% при амплітуді коливань  $a_\psi = 0.2$  рад і  $v_2 = \frac{2}{9}$ , а при  $a_\psi = 0.3$  рад - на 35%;

- із більшим значенням параметру нелінійності  $v_2$  для малих амплітуд коливань є меншим і більшим для “великих” амплітуд коливань ПЧ;

- для СП із прогресивним законом зміни відновлювальної сили для малих амплітуд коливань є більшим як із лінійним за одних і тих же значень статичної деформації, а для великих навпаки. При амплітуді коливань ПЧ  $a_\psi = 0.1$  рад і статичній деформації ПЧ 0.25 м.

критичне значення швидкості стійкого руху при  $v_2 = \frac{2}{3}$  є на 5% більшим як для СП із лінійним законом, а при  $a_\psi = 0.4$  рад - меншим на 11%.

Що стосується впливу коливань НПЧ та статичної деформації шини то:

- збільшення статичної деформації шини з 0.03 м до 0.05 м спричиняє зростання критичної швидкості руху при  $a_\psi = 0.1$  рад  $a_\varphi = 0.01$  рад на 9% ( $v_2 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.3\text{м}$ ), а при  $a_\psi = 0.2$  рад. і  $a_\varphi = 0.01$  рад на 29%;

- зростання амплітуди коливань НПЧ спричиняє зменшення критичної швидкості стійкого руху. Зростання  $a_{\varphi}$  від 0.01 рад до 0.015 рад спричиняє зменшення критичної швидкості на 35% при  $a_{\psi} = 0.1$  рад,  $v_2 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.3$  м,  $\Delta_1 = 0.05$  м, а при  $a_{\psi} = 0.2$  рад - на 45%.

У випадку:

- регресивної характеристики пружних елементів і прогресивної шин критичне значення швидкості стійкого руху є для більших значень параметру  $v_1$  дещо більшим для малих амплітуд коливань ПЧ і навпаки меншим - для великих амплітуд коливань ПЧ. При амплітуді коливань ПЧ 0.1 рад зростання параметру  $v_2$  від  $\frac{-2}{5}$  до  $\frac{-2}{5}$  спричиняє зростання критичної швидкості стійкого руху на 3%, а при амплітуді коливань 0.4 рад – критичне значення швидкості стійкого руху зростає на 33% при таких значеннях інших параметрів системи  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $\Delta = 0.2$  м,  $a_{\varphi} = 0.01$ ,  $\Delta_1 = 0.04$  м ;

- регресивної характеристики пружних елементів та шин критичне значення швидкості стійкого руху є більшим за критичне значення швидкості за регресивного закону зміни пружних властивостей СП і лінійних пружних властивостей шин.

**Висновки.** Отримані у роботі результати показують, що:

- критичні значення швидкості стійкого руху із урахуванням поперечно кутових коливань НПЧ навіть при малих амплітудах коливань останніх є до 30% меншими порівняно з випадком коли цим чинником знехтувано;

- поперечно кутові коливання ПЧ ТА НПЧ КТЗ значною мірою зменшують критичне значення швидкості стійкого руху з огляду на перекидання. Зростання амплітуди коливань НПЧ  $a_{\varphi}$  від 0.01 рад до 0.015 рад спричиняє зменшення критичної швидкості стійкого руху на 35% при  $a_{\psi} = 0.1$  рад,  $v_2 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.3$  м,  $\Delta_1 = 0.05$  м, а при  $a_{\psi} = 0.2$  рад - на 45% за всіх інших вказаних значень параметрів СП;

- для КТЗ із прогресивним законом зміни характеристик пружних елементів більшим величинам їх статичної деформації та шин відповідає більше значення критичної швидкості стійкого руху. Збільшення статичної деформації шин з 0.03 м до 0.05 м спричиняє зростання критичної швидкості руху при  $a_{\psi} = 0.1$  рад  $a_{\varphi} = 0.01$  рад на 9% ( $v_2 = \frac{2}{9}$ ,  $\Delta = 0.3$  м), а при  $a_{\psi} = 0.2$  рад. і  $a_{\varphi} = 0.01$  рад на 29%.

Таким чином, використання у КТЗ СП із прогресивним законом зміни характеристик пружних елементів збільшує критичне значення швидкості стійкого руху у порівнянні із амортизаторами із пружними елементами з лінійним чи регресивним законом зміни відновлювальної сили. Одночасно нехтування коливаннями НПЧ навіть за малих амплітуд її коливань призводить до завищених результатів критичних значень швидкості стійкого руху.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Артющенко А.Д. Дослідження впливу характеристик підвіски автомобіля малого класу на плавність ходу та її модернізація / Артющенко А.Д., Суярков О.Г. // вісник НТУ “ХП”.- 2013.-№ 32 (1004).- С.21 -27.
2. Misaghi, S.; Tirado, C.; Nazarian, S.; Carrasco, C. Impact of pavement roughness and suspension systems on vehicle dynamic loads on flexible pavements. Transp. Eng. 2021, 3, 100045.
3. Васильев А.Ю. Вплив характеристики підвіски на стійкість броньованих армійських автомобілів багатоцільового призначення // Васильев А.Ю. Грубель М.Г., Шаталов О.Є., Нанівський Р.А., Дудар Є.Є. // Механіка та машинобудування №2; Харків: Технічний збірник НТУ ХП. - 2015 - С. 68-75.

4. Математическое моделирование процессов возмущенного движения агрегатов и систем бронетанковой техники. / [Александров Е.Е., Волонцевич Д.О., Дущенко В.В., Елифанов В.В., Кохановский Н.В.]; – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2012. – 356 с.
5. Leitner, B.; Decký, M.; Kováč, M. Road pavement longitudinal evenness quantification as stationary stochastic process. *Transport* 2019, 34, 195–203.
6. Подригало М.А. Оцінка динамічної стійкості автомобіля / Подригало М.А., Кorbко М.І., Клeц Д.М. //“Автомобіле- та тракторобудування”. Вісник НТУ “ХПІ” 58, 2008.- С.134-137.
7. Литвинов А.С. Управляемость и устойчивость автомобиля.- М.: Машиностроение, – 1971. – 416 с.
8. Park S., Popov A., Cole D. Influence of soil deformation in off-road heavy vehicle suspension vibration. *Journal of Terramechanics* 41 (2004) P. 41–68. – Режим доступу: [www.academia.edu/14061651/Influence\\_of\\_soil\\_deformation\\_on\\_off-road\\_heavy\\_vehicle\\_suspension\\_vibration](http://www.academia.edu/14061651/Influence_of_soil_deformation_on_off-road_heavy_vehicle_suspension_vibration).
9. Пісарев В.П. Можливості по компоновці нових пружних елементів підвіски, з прогресивною характеристикою, в межах існуючого конструктивного рішення БТР-60 / В.П. Пісарев, А.П. Горбунов // *Механіка та машинобудування*. – 2009. – № 2 – С. 51-56.
10. Ružinskas, A.; Giessler, M.; Gauterin, F.; Wiese, K.; Bogdevičius, M. Experimental investigation of tire performance on slush. *Ekspluat. I Niezawodn. Maint. Reliab.* 2021, 23, 103–109.
11. Болдовский В.Н. Исследование процессов взаимодействия ходовых систем автомобилей с деформируемой опорной поверхностью/ В . Н . Болдовский// *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, - № 5/4 (59) 2012. - С.50-52.
12. Мельничук С.В. Визначення параметрів плавності ходу моделі підвіски на основі чотири ланкового важільного механізму/ С.В Мельничук, Ю.О. Подчашівський, І.В. Вітюк, І.А. Бовсунівський // *Вісник ЖДТУ*. – 2010. – № 4 (55). – С. 25-27.
13. Hussan, S.; Kamal, M.A.; Hafeez, I.; Ahmad, N.; Khanzada, S.; Ahmed, S. Modelling asphalt pavement analyzer rut depth using different statistical techniques. *Road Mater. Pavement Des.* 2020, 21, 117–142.
14. Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий. – К.: Наукова думка, 1990. – 232 с.
15. Васильев А.Ю. Вплив характеристики підвіски на стійкість броньованих армійських автомобілів багатоцільового призначення// Васильев А.Ю. Грубель М.Г., Шаталов О.Є., Нанівський Р.А., Дудар Є.Є. // *Механіка та машинобудування* №2; Харків: Технічний збірник НТУ ХПІ.- 2015-С. 68-75.
16. Podryhalo M.A., Korbko M.I., Klets D.M. 2008. Evaluation of automobile dynamic ability. “Automobile and tractor manufacture”. *Bulletin NTU “KhPI”*. – pp. 134-137.
17. Oleg Lyashuk. Longitudinal-angular oscillation of wheeled vehicles with non-linear power characteristics of absorber system/ Oleg Lyashuk, Volodymyr Klendiy Tetyana Pyndus, Mariya Sokil, Olexandr Marunych / *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*.- 2016.№2(83).- 82-89 ISSN 1727-7108.
18. Bogdan Sokil, Oleg Lyashuk, Mariya Sokil, Yuriy Vovk, Volodymyr Dzyura, Victor Aulin, Roman Khoroshun Interpreting the main power characteristics choice of the wheel vehicles guided cushioning system *Mechanical Engineering in Transport*.2021,23(2). pp. B139-B149
19. Sapragonas, J.; Dargužis, A. Model of radial deformations of protector of vehicle tire. *Mechanics* 2011, 17, 21–29.
20. Сокіл Б.І. Вплив характеристик підвіски автомобілів спеціального призначення на поперечно-кутові коливання підресореної маси / Сокіл Б.І., Нанівський Р.А., Грубель М. Г., Яльніцький О.Д.// *Автошляховик України*. - № 1-2(243-244). Київ – 2015. – С. 18 – 20.
21. Сокіл Б.І. Вплив силових характеристик системи підресорювання на плавність ходу автомобілів /Б.І. Сокіл, Р.А. Нанівський, Д.Л. Паращук, М.Г. Грубель// *Автошляховик України*. - № 1-2 (249-250). Київ – 2017. – С. 38 – 41.
22. Крайник Л.В. Моделювання взаємодії колеса з опорною поверхнею що деформується / Крайник Л.В., Грубель М.Г., Мазурик Я.С.// *Міжвузівський збірник "Наукові нотатки" № 55*. Луцьк, 2016. С. 212-216.
23. Грубель М.Г. Методологія оцінки опорної прохідності колісної військової автомобільної техніки / М.Г. Грубель, Л.В. Крайник, О.М. Купріненко // *Науково-технічний журнал озброєння та військова техніка*. — № 4(24). К. — 2019. — С. 22-35.
24. Войтенко В.А. Математичне моделювання пружної підвіски автомобіля / В. А. Войтенко.

Электротехнические и компьютерные системы. Автоматизированные электромеханические системы. – 2016. – №10 (86) – С. 33–40.

25. Богомолов В.О. Моделивання дорожньої поверхні для розрахунку динаміки руху транспортних засобів / В.О. Богомолов, В.І. Клименко, А.І. Шилов, Р.В. Алексеев. Автомобильный транспорт. – 2011. – №29 – С. 37–42.

26. Tyan F. Generation of Random Road Profiles /F.Tyan, Y. Hong, S. Tu // Journal of Advanced Engineering, 2009. – Vol. 4. – № 2. – P. 151–156.

27. Кузьо І. В. Моделивання мікропрофілю дороги у задачах динаміки колісних машин / І. В. Кузьо, Ю. В. Залуцький, О. В. Житенко. Вісник НУЛП, Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2016. – №838 – С. 173–179.

28. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский//– М.: Наука, 1974. – 504 с.

29. Сенік П. М. Обернення неповної Бета-функції / П.М. Сенік // Укр. мат. журн. – К., 1969. – 21, № 3. – С. 325-333.

30. Nazarkevych M. Investigation of Beta- and Ateb-function dependencies. Bulletin of the National University. Lviv Polytechnic”.732: Computer Science and Information Technology, 207–216 (2012) (in Ukrainian).

31. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. & Tishchenko L.N. (2015) Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dissipative oscillators oscillations]. Kharkiv, Miskdruk. 116.

32. Хаустов Д.С. Умови внутрішнього резонансу військової гусеничної техніки / Хаустов Д.С. / Системи озброєння і військова техніка.-2016.-№1 (45). - С.73-76.

#### REFERENCES

1. Artyushchenko A.D., Suyarkov O.H. (2013), “Doslidzhennya vplyvu kharakterystyk pidvisky avtomobilya maloho klasu na plavnist' khodu ta yiyi modernizatsiya” [Study of the influence of the characteristics of the suspension of a small class car on the smoothness of the ride and its modernization], Bulletin of the NTU "KhPI, № 32 (1004), pp.21-27.

2. Misaghi, S., Tirado, C., Nazarian, S., Carrasco, C. (2021), Impact of pavement roughness and suspension systems on vehicle dynamic loads on flexible pavements, Transp. Eng, №3, 100045.

3. Vasyly'ev A.YU., Hrubel' M.H., Shatalov O.YE., Naniys'kyi R.A. and Dudar YE.YE. (2015), “Vplyv kharakterystyky pidvisky na stiykist' bron'ovanykh armiys'kykh avtomobiliv bahatotsil'ovoho pryznachennya” [The influence of the suspension characteristics on the stability of multi-purpose armored army vehicles], Kharkiv: Technical collection of NTU KhPI, Mechanics and mechanical engineering, № 2, pp. 68-75.

4. Aleksandrov Ye.Ye., Volontsevich D.O., Dushchenko V.V., Yepifanov V.V., Kokhanovskiy N.V. (2012), “Matematicheskoye modelirovaniye protsessov vozmushchennogo dvizheniya agregatov i sistem bronetankovoy tekhniki” [Mathematical modeling of the processes of perturbed movement of units and systems of armored vehicles.], Kharko, NTU "KhPI", P. 356.

5. Dushchenko V.V. (2018), “Stemy pidresoryuvannya viys'kovykh husenychnykh i kolisnykh mashyn: rozrakhunok i syntez” [Suspension springs of military tracked and wheeled vehicles: calculation and synthesis], NTU "KhPI", Kharkiv, 336 p.

6. Leitner, B., Decký, M., Kováč, M. (2019), Road pavement longitudinal evenness quantification as stationary stochastic process. Transport, № 34, 195–203.

7. Podryhalo M.A., Korbko M.I., Klets D.M. (2009), “Otsinka dynamichnoyi stiykosti avtomobilya” [Evaluation of the dynamic stability of the car], Automotive and tractor manufacturing. Bulletin of NTU "Khpi", № 58, pp.134-137.

8. Litvinov A.S. (1971),“Upravlyayemost' i ustoychivost' avtomobilya” [Controllability and stability of the car], М.: Mashinostroenie, P.416.

9. ParkS., Popov A., Cole D. (2004), Influence of soil deformation in off-road heavy vehicle suspension vibration, Journal of Terramechanics, № 41, pp. 41–68.

10. Pisaryev V.P. , Gorbunov A.P. (2009), “Mozhlyvosti po komponovtsi novykh pruzhnykh elementiv pidvisky, z prohresyvnoyu kharakterystykoyu, v mezhakh isnyuchoho konstruktyvnoho rishennya BTR-60” [Possibilities for the layout of new elastic elements of the suspension, with a progressive characteristic, within the existing design solution BTR-60], Mechanics and mechanical engineering, № 2, pp. 51-56.

11. Ružinskas, A.; Giessler, M.; Gauterin, F.; Wiese, K.; Bogdevičius, M. (2021), Experimental investigation of tire performance on slush. Eksploat. I Niezawodn. Maint. Reliab, № 23, pp. 103–109.

12. Boldovskiy V.N. (2012), "Issledovaniye protsessov vzaimodeystviya khodovykh sistem avtomobiley s deformiruyemoy opornoй poverkhnost'yu" [Study of the processes of interaction of running systems of cars with a deformable supporting surface], East European Journal of Advanced Technologies, № 5/4 (59), pp.50-52.

13. Mel'nychuk S.V., Podchashivs'kyy YU.O., Vityuk I.V. and Bovsunivs'kyy I.A. (2010), "Vyznachennya parametriv plavnosti khodu modeli pidvisky na osnovi chotyry lankovoho vazhil'noho mekhanizmu/ S.V Mel'nychuk" [Determining smoothness parameters of a suspension model based on a four-link lever mechanism], Bulletin of ZHTU, № 4 (55), pp. 25-27.

14. Hussan, S., Kamal, M.A., Hafeez, I., Ahmad, N., Khanzada, S. and Ahmed, S. (2020), Modelling asphalt pavement analyzer rut depth using different statistical techniques. Road Mater. Pavement Des., №21, pp.117-142.

15. Lobas L.G., Verbitskiy V.G. (1990), "Kachestvennyye i analiticheskiye metody v dinamike kolesnykh mashin" [Qualitative and analytical methods in the dynamics of wheeled vehicles], K.: Naukova Dumka, P. 232.

16. Vasylyev A.YU., Hrubel' M.H., Shatalov O.YE., Nanivs'kyy R.A. and Dudar YE.YE. (2015), "Vplyv kharakterystyky pidvisky na stiykist' bron'ovanykh armiy'skykh avtomobiliv bahatotsil'ovoho pryznachennya" [The influence of the suspension characteristics on the stability of multi-purpose armored army vehicles], Kharkiv: Technical collection of NTU KhPI, Mechanics and mechanical engineering, No. 2, pp. 68-75.

17. Podryhalo M.A., Korbko M.I., Klets D.M. (2008), Evaluation of automobile dynamic ability. Bulletin NTU KhPI, Automobile and tractor manufacture, pp. 134-137.

18. Lyashuk Oleg, Klendiy Volodymyr, Pyndus Tetyana, Sokil Mariya and Marunch Olexandr (2016), Longitudinal-angular oscillation of wheeled vehicles with non-linear power characteristics of absorber system. Scientific Journal of the Ternopil National Technical University, №2(83), pp - 82-89.

19. Sokil Bogdan, Lyashuk Oleg, Sokil Mariya, Vovk Yuriy, Dzyura Volodymyr, Aulin Victor and Khoroshun Roman (2021), Interpreting the main power characteristics choice of the wheel vehicles guided cushioning system Mechanical Engineering in Transport, №23(2), pp. B139-B149.

20. Sapragnas, J.; Darguzis, A. (2011), Model of radial deformations of protector of vehicle tire. Mechanics, №17, p.p 21-29.

21. Sokil B.I. Nanivs'kyy R.A., Hrubel' M. H., Yal'nyts'kyy O.D. (2015), "Vplyv kharakterystyk pidvisky avtomobiliv spetsial'noho pryznachennya na poperechno-kutovi kolyvannya pidresorenoyi masy" [The influence of the characteristics of the suspension of special-purpose vehicles on the transverse-angular oscillations of the sprung mass], Kyiv, Avtslyahovyk of Ukraine, №1-2 (243-244), pp. 18 - 20.

22. Sokil B.I., Nanivs'kyy R.A., Parashchuk D.L., Hrubel' M.H. (2017), "Vplyv sylovykh kharakterystyk systemy pidresoryuvannya na plavnist' khodu avtomobiliv" [The influence of the power characteristics of the suspension system on the smoothness of the movement of cars], Kyiv, SUV of Ukraine, № 1-2 (249-250), pp. 38-41.

23. Kraynyk L.V., Hrubel' M.H., Mazuryk YA.S. (2016), "Modelyuvannya vzayemodiyi koleasa z opornoй poverkhneyu shcho deformuyet'sya" [Modeling the interaction of a wheel with a deformable support surface], Lutsk, Interuniversity collection "Scientific notes", №. 55, pp. 212-216.

24. Hrubel' M.H., Kraynyk L.V., Kuprinenko O.M. (2019), "Metodolohiya otsinky opornoй prokhdnosti kolisnoy viys'kovoy avtomobil'noy tekhniky" [Methodology of assessment of the support patency of wheeled military vehicles], K., Scientific and technical magazine Armaments and military equipment, № 4(24), pp. 22-35.

25. Voytenko V.A. (2016), "Matematichne modelyuvannya pruzhnoy pidvisky avtomobilya" [Mathematical modeling of spring suspension of a car], Electrical and computer systems. Automated electromechanical systems, No. 10 (86), pp 33-40.

26. Bohomolov V.O., Klymenko V.I., Shylov A.I., Alekseyev R.V. (2011), "Modelyuvannya dorozhn'oyi poverkhnii dlya rozrakhunku dynamiky rukhu transportnykh zasobiv" [Modeling of the road surface for the calculation of vehicle traffic dynamics], Automobile transport, № 29, pp. 37-42.

27. Tyan F., Y. Hong, S. Tu (2009), Generation of Random Road Profiles. Journal of Advanced Engineering, Vol. 4, № 2, pp. 151-156.

28. Kuz'o I. V., Zaluts'kyy YU. V., Zhytenko O. V. (2016), "Modelyuvannya mikroprofilyu dorohy u zadachakh dynamiky kolisnykh mashyn" [Modeling of the microprofile of the road in problems of dynamics of wheeled vehicles], NULP Bulletin, Dynamics, strength and design of machines and devices, №838, p.p. 173-179.

29. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy YU.A. (1974), "Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh

kolebaniy” [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations], M.: Nauka, P. 504.

30.Senyk P. M. (1969), “Obernennya nepovnoyi Beta-funktsiyi” [Inversion of the incomplete Beta function], K., Ukr. mate. Journal, v. 21, № 3, pp. 325-333.

31.Nazarkevych M. (2012), Investigation of Beta- and Ateb-function dependencies. Bulletin of the National University. Lviv Polytechnic. 732: Computer Science and Information Technology, p.p. 207–216 (in Ukrainian).

32.Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. & Tishchenko L.N. (2015), Kolyvannya dysypatyvnykh ostsylatoriv [Dissipative oscillators oscillations], Kharkiv, Miskdruk, P.116.

33.Khaustov D.YE. (2016), “Umovy vnutrishn’oho rezonansu viys’kovoyi husenychnoyi tekhniky” [Conditions of internal resonance of military tracked vehicles], Weapons systems and military equipment, №1 (45), pp.73-76.

**PhD Nanivskiy R.**

**NON-LINEAR TRANSVERSE-ANGULAR OSCILLATIONS  
OF SPRUNG AND UNSPRUNG PARTS OF WHEELED VEHICLES  
AND THEIR INFLUENCE ON TRAFFIC STABILITY**

*A method of analytical study of the nonlinear transverse-angular oscillations influence of the sprung-unsprung part system on the traffic stability of a wheeled vehicle along curved road sections has been developed. A system of nonlinear differential equations describing the dynamics of the relative motion of this system has been obtained and a first approximation of its analytical solution has been constructed. The peculiarity of the oscillations of the specified parts is that their natural frequencies depend on the amplitudes. Therefore, the dynamic interaction between the sprung and unsprung parts, as well as the road surface and elastic tires are determined by the vibrations amplitude-frequency characteristics of the specified parts, which are caused by road irregularities. Using the kinetostatics equation of the unsprung-sprung part system, the forces of dynamic interaction of elastic wheels with the road surface were determined – the basic ratios for evaluating traffic stability. It has been established: the relative oscillations of the sprung and unsprung parts of a vehicle significantly reduce the critical speed values of stable motion for overturning; the critical speed value of stable motion for overturning is greater for larger static deformation values of elastic shock absorbers and tires, as well as the progressive characteristic of elastic shock absorbers.*

*The obtained main results can serve as a basis for the creation of a software product of adaptive suspensions, and their reliability is confirmed by obtaining results in the extreme case, which apply to simpler - linear calculation models of vehicle dynamics.*

*Keywords: vehicle, suspension systems, adaptive suspensions, nonlinear transverse-angular oscillations, amplitude-frequency characteristics of oscillations, kinetostatics equation.*